# Mathematik 3 für Informatiker — Übungsbeispiele

**1)** Man verwende die Methode der erzeugenden Funktionen zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differenzengleichung erster Ordnung $x_{n+1} - x_n + 5 = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

**2)** Man finde die Lösung der Differenzengleichung zweiter Ordnung $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n$ zu den Anfangsbedingungen $x_0 = 2$ und $x_1 = 5$ mit Hilfe der Methode der erzeugenden Funktionen.

3–16) Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen:

**3)** $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1$.

**4)** $a_n = 2a_{n-1} + 2^{2n-2}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 5$.

**5)** $a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

**6)** $a_n = 5a_{n-1} + 2^{n-1} - 6n5^n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

**7)** $a_n = 2a_{n-1} + (1 + 2^n)^2$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

**8)** $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 1 + \sin(2n)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = -1$.

**9)** $a_n - a_{n-1} + 2a_{n-2} = 1 + \cos(2n)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$.

**10)** $a_n - a_{n-2} = \sin(n)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 7$, $a_1 = -12$.

**11)** $2a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = (n^2 + 3n - 4)3^n$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 10$, $a_1 = -7$.

**12)** $2a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = (3n - 10)2^{n+2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

**13)** $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} = 1$ $(n \geq 3)$, $a_0 = 3$, $a_1 = a_2 = -1$.

**14)** $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = n^2 2^n$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

**15)** $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^{2n-2} - n^2 5^{n+3}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

**16)** $a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 2^n - 3(-1)^n$ $(n \geq 3)$, $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

**17)** Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1} = 2a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = 3a_n + 3b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = b_0 = 1$ unter Benützung erzeugender Funktionen.

**18)** Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1} = 3a_n + 5b_n$, $b_{n+1} = 4a_n + 4b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = b_0 = 2$ unter Benützung erzeugender Funktionen.

**19)** Sei $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$. Man drücke mit Hilfe von $A(x)$ und $A(-x)$ die erzeugende Funktion $A_g(x) = \sum_{k \geq 0} a_{2k} x^{2k}$ aus.

**20)** Sei $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$. Man drücke mit Hilfe von $A(x)$ und $A(-x)$ die erzeugende Funktion $A_u(x) = \sum_{k \geq 0} a_{2k+1} x^{2k+1}$ aus.

**21)** Sei $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ und $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Man drücke $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ mit Hilfe von $A(x)$ aus.

**22)** Sei $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ und $b_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$. Man drücke $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ mit Hilfe von $A(x)$ aus.

23–26) Man bestimme die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$:

**23)** $a_n = n^2 + 2^n$

**24)** $a_n = n + n3^n$

**25)** $a_n = n(n-1) + (-1)^n$

**26)** $a_n = n(-1)^n + 2^{-n}$

27–28) Man bestimme mit Hilfe erzeugender Funktionen:

**27)** $s_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)$

**28)** $s_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$

**29)** Man bestimme die Lösung der Differenzengleichung $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ (für $n \geq 0$) zum Anfangswert $x_0 = 0$ auf graphischem Weg, berechne die Gleichgewichtspunkte und überprüfe sie auf Stabilität.

**30)** Sei $a$ eine positive reelle Zahl und $k \geq 1$ eine natürliche Zahl. Betrachten Sie die Differenzengleichung

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$$

mit Startwert $x_0 > 0$.

a) Ermitteln Sie alle Gleichgewichtspunkte dieser Differenzengleichung in Abhängigkeit von $a$ und $k$.
b) Untersuchen Sie die auftretenden Gleichgewichtspunkte auf Stabilität. Für welche Werte von $k$ sind alle Gleichgewichtspunkte asymptotisch stabil bzw. alle instabil?

31–33) Zu Conway's Spiel des Lebens

**31)** Man untersuche das Verhalten der im Buch, Abb. 7.20 dargestellten Ausgangskonfigurationen.

**32)** Man finde – unter Verwendung eines geeigneten Simulationsprogramms aus dem Internet – mindestens drei Beispiele für stabile Konstellationen.

**33)** Welche Ausgangsmuster sterben vollständig aus, welche werden stabil oder oszillieren? Gibt es Ausgangsmuster, für welche die Bevölkerung grenzenlos anwächst?

**34)** Man löse die Differentialgleichung $y' = \frac{x}{x-y}$ mit der Isoklinenmethode.

**35)** Man bestätige, dass die Funktionen

$$N(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-rt}}, \; C \in \mathbb{R}, \quad \text{sowie} \quad N = 0$$

Lösungen der logistischen Differentialgleichung $N'(t) = rN(1 - \frac{N}{K})$ sind. Man berechne und skizziere jene Lösungsfunktion, welche die Anfangsbedingung $N(0) = \frac{K}{10}$ erfüllt.

**36)** Man stelle zu der Kurvenschar

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = c$$

mit dem „Scharparameter“ $c$ eine Differentialgleichung auf, welche alle Funktionen der Schar als Lösungskurven besitzt.

**37)** Man bestimme die Differentialgleichung der Kurvenscharen $x^2 + y^2 = C$ und $y = Ce^{x/C}$.

**38)** Man betrachte die Kurvenschar $\Phi(x, y, C) = y - Cx^2 - C^2$, $C \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie eine implizite Differentialgleichung 1. Ordnung, die diese Kurvenschar als allgemeine Lösung besitzt.
(b) Weisen Sie nach, daß die Einhüllende dieser Kurvenschar ebenfalls Lösung dieser Differentialgleichung ist. Die Einhüllende erhält man durch Elimination von $C$ aus den Gleichungen

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial C}\Phi(x, y, C) = 0$$

**39)** Man beweise das Lemma von Gronwall: Sei $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiters gelte für alle $x \in [a,b]$ die Ungleichung

$$0 \le \phi(x) \le C + L \int_a^x \phi(t)\,dt$$

mit $C, L \ge 0$. Dann gilt für alle $x \in [a,b]$

$$\phi(x) \le Ce^{L(x-a)}.$$

**40)** Man beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes:
Ist $f : G \to \mathbb{R}$ stetig partiell nach $y$ differenzierbar, dann genügt $f$ in jedem Rechteck $R = \{(x,y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$, das ganz in $G$ liegt, einer $L$-Bedingung (bezüglich $y$) mit $L$-Konstanten $L = \max\{|f_y(x,y)| : (x,y) \in R\}$.

**41)** Man zeige, daß die Funktion $f(x,y) = 5|\cos(\pi y)| + x^2$ in $G = \mathbb{R}^2$ einer $L$-Bedingung genügt und gebe eine $L$-Konstante an.

**42)** Bestimmen Sie die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y' = y.$$

Für welche Anfangswerte von $(x_0, y_0)$ ist das zugehörige AWP $y(x_0) = y_0$ nicht oder nicht eindeutig lösbar? Welche Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind dabei verletzt?

**43)** Für welche Werte von $y_0$ ist das AWP $\ xy' + 2y = 3x, \quad y(0) = y_0$ lösbar?
Geben Sie für diese Werte jeweils die Lösung an.

**44)** Vom neuesten Modell eines Mobiltelefonproduzenten werden im Weihnachstgeschäft 3000 Stück abgesetzt, nach 12 Monaten sind davon nur mehr 2820 Stück in Betrieb. Unter der Annahme, daß die monatliche Ausscheidungsrate proportional zur Nutzungsdauer ist, bestimme man die Anzahl $y(t)$ der in Betrieb stehenden Mobiltelefone (von den ursprünglich 3000 Stück) in Abhängigkeit von ihrer Verwendungsdauer $t$, sowie die längste Nutzungsdauer.

45–54) Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

**45)** $4x\,dy - y\,dx = x^2\,dy$

**46)** $(1 + 2y)\,dx - (4 - x)\,dy = 0$

**47)** $\cos y\,dx + (1 - e^{-x})\sin y\,dy = 0$ (für $x = 0$ sei $y = \pi/2$)

**48)** $y' - y\tan x = 0$

**49)** $xy' + y = x^2 + 3x + 2$

**50)** $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, $y(0) = 1$

**51)** $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$

**52)** $y'' - 3y' - 4y = 2x$

**53)** $y''' - 7y' + 6y = 1$

**54)** $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$

55–58) Man löse die exakten Differentialgleichungen.

**55)** $(x + y + 1)\,dx - (y - x + 3)\,dy = 0$

**56)** $(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1)\,dx + (x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y)\,dy = 0$

**57)** $(4x^3y^3 + \frac{1}{x})\,dx + (3x^4y^2 - \frac{1}{y})\,dy = 0$

**58)** $\big(\cos y + y\cos x\big) + \big(\sin x - x\sin y\big)y'(x) = 0$

**59)** Das Wachstum einer Population der Größe $N(t)$ zur Zeit $t$ werde durch die Differentialgleichung

$$\frac{dN}{dt} = r(K - N) \quad \text{mit} \quad N(0) = N_0$$

beschrieben. Dabei sind $r$ und $K$ positive Parameter. Man löse die Differentialgleichung (a) durch Bestimmung der homogenen Lösung und Variation der Konstanten bzw. (b) durch Auffinden einer partikulären Lösung für die inhomogene Gleichung mittels eines konstanten unbestimmten Ansatzes $N_p(t) = A$. Ferner skizziere man den Graphen der Lösungsfunktion für $r = 0.08$ und $K = 1000$.

**60)** Ein RCL-Schwingkreis besteht aus einer Induktivität $L$ von 0.05 Henry, einem Widerstand $R$ von 20 Ohm, einem Kondensator $C$ von 100 Mikrofarad sowie einer elektromotorischen Kraft ("Batterie") von $E = E(t) = 100\cos(200t)$, die in Reihe geschaltet sind. Bestimme den Strom $i = i(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ unter der Anfangsbedingung $i(0) = 0$ und der Bedingung, daß für die Ladung $q(t) = \int_{\tau=0}^{t} i(\tau)d\tau$ gilt mit $q(0) = 0$. Wählen Sie zur Lösung der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten die Ansatzmethode.
Anleitung: Es gilt $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{\tau=0}^{t} i(\tau)d\tau = E(t)$.

**61)** Ein elektrischer Schwingkreis enthält einen Widerstand $R$ mit 8 Ohm, der mit einer Induktion $L$ von 0.5 Henry und einer Batterie von $E = E(t)$ Volt in Reihe geschaltet ist. Bei $t = 0$ ist der Strom gleich Null. Berechne den Strom $I = I(t)$ zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ und den maximalen Strom, wenn

(1) $E = E(t) = 64$,
(2) $E = E(t) = 32e^{-8t}$.

Hinweis: Es muß gelten, daß die Summe der Spannungsabfälle im Schwingkreis $= 0$ ist (Batterie: negativer Abfall). Der Spannungsabfall beim Widerstand ist $RI$ und bei der Induktion $L\frac{dI}{dt}$.

**62)** Ein Tank enthält 100 Liter Wasser. Eine Salzlösung, die 0.5 kg Salz pro Liter enthält, fließt mit der Rate von 3 Liter pro Minute ein und die gut umgerührte Mischung fließt mit derselben Rate aus.

(1) Wieviel Salz ist zu einer beliebigen Zeit in dem Tank?
(2) Wann enthält der Tank 25 kg Salz?

**63)** Ein Tank enthält 400 Liter Wasser. Eine Salzlösung, die 0.4 kg Salz pro Liter enthält, fließt mit der Rate von 20 Liter pro Minute ein und die gut umgerührte Mischung fließt mit der Rate von 12 Liter pro Minute aus. Wieviel Salz enthält der Tank nach einer Stunde ?

**64)** Man ermittle alle Lösungen der separablen Differentialgleichung $y' = \frac{y^2-4}{x}$

**65)** Man berechne alle möglichen Gleichgewichtszustände der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y' = y\left(4\frac{y}{y+1} - 0.5y - 1\right)$$

und überprüfe sie auf Stabilität.

**66)** Man berechne alle möglichen Gleichgewichtszustände der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y' = \left(\frac{8y}{y+1} - y - 1\right)y$$

und überprüfe sie auf Stabilität.

**67)** Man untersuche auch das globale Lösungsverhalten für die Lösungen der Differentialgleichung aus der vorhergehenden Aufgabe in der $(y, y')$-Phasenebene.

**68)** Man zeige mit Hilfe des Summensatzes für den Cosinus, dass gilt

$$A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\cos(\omega t - \phi),$$

wobei $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ und $\tan\phi = \frac{B}{A}$.

**69)** Die Legendre-Dgl. besitzt die Gestalt

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten im folgenden den Fall $m = 1$. Durch Nachrechnen bestätigt man sofort, daß $y(x) = x$ eine Lösung der Gleichung ist. Ermitteln Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = C(x)x$ eine zweite, unabhängige Lösung der Differentialgleichung. Wie sieht die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus?

**70)** Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Weltbevölkerung (in Milliarden) seit dem Jahr 1950 wieder:

| Jahr $t$ | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Bevölkerung $f(t)$ | 2.5 | 3 | 3.6 | 4.4 | 5.3 | ? |

Man finde eine Trendfunktion der Form $g(t) = ce^{at}$ und extrapoliere die Bevölkerungszahl für das Jahr 2000.

(Hinweis: Man bestimme die Ausgleichsgerade für die Wertepaare $(t, \ln g(t))$ nach der Methode der kleinsten Quadrate.)

**71)** Der Gebrauchswert einer Maschine betrage nach zwei Jahren noch 50%, nach vier Jahren noch 25% des Anschaffungspreises. Man gebe ein Polynom $p(t)$ 2. Grades als Funktion der Nutzungsdauer $t$ an, das mit diesen empirischen Daten übereinstimmt und für $t = 0$ den Wert 100 (Neuwert mit 100%) annimmt. Ferner vergleiche man die Erfahrungswerte von 70% Gebrauchtwert nach einem Jahr und 35% nach drei Jahren mit den entsprechenden $p$-Werten.

**72)** Man bestimme das Interpolationspolynom dritten Grades zu den Interpolationsstellen $(0, 180)$, $(2, 240)$, $(4, 320)$ und $(6, 360)$ durch Lagrange-Interpolation.

**73)** Man löse das Interpolationsproblem aus Aufgabe 72) unter Anwendung des Newtonschen Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Funktionswerte des Interpolationspolynoms an den Stellen $x = 1, 3, 5$?

**74)** Bestimmen Sie die Lagrange-Polynome $L_i(x)$ und das quadratische Interpolationspolynom für die Datenpunkte

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $y$ | -1 | -2 | 3 |

**75)** Bestimmen Sie die Lagrange-Polynome $L_i(x)$ und das quadratische Interpolationspolynom für die Datenpunkte

| $x$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | -2 | 1 |

**76)** Bestimmen Sie das Interpolationspolynom für die Datenpunkte

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0 | 3 | 2 |

mit Hilfe der Newton-Interpolation.

**77)** Gegeben sind die Wertepaare $(x_i, y_i)$ mit $1 \le i \le n$. In manchen Problemstellungen ist von vorneherein bekannt, daß die zugrundeliegende Funktion durch den Ursprung gehen muß. Im Falle der Approximation durch eine Gerade kann man dann den Ansatz $y = bx$

verwenden. Man ermittle nun, wie dabei $b$ gewählt werden muß, wenn man nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgeht. D.h., man minimiere die Quadratsumme

$$Q(b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i)^2.$$

**78)** Mit Hilfe der Sehnentrapezformel berechne man $\pi$ aus der Gleichung

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Dabei verwende man eine Unterteilung des Integrationsintervalls in 2, 5 und 10 Teilintervalle.

**79)** Aus der Gleichung in Aufgabe 78 berechne man $\pi$ unte Anwendung (a) der Kepler'schen Fassregel bzw. (b) der Simpson'schen Regel bei Unterteilung des Integrationsintervalls in 10 Teilintervalle.

**80)** Man bestimme näherungsweise das Integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} \ dx.$$

**81)** Mittels der Kepler'schen Fassregel kann das Volumen von Rotationskörpern (z.B. von Fässern) näherungsweise berechnet werden, falls deren Querschnitt an drei Stellen bekannt ist. Man zeige, dass man dabei für (a) den Zylinder, (b) Kegel und (c) Kegelstumpf sowie (d) das Rotationsparaboloid das genaue Volumen erhält.

**82)** In nachstehender Tabelle sind die Grenzbetriebskosten $k(t)$ einer Maschine bei einer Arbeitsleistung von $t$ Betriebsstunden angegeben. Man bestimme daraus näherungsweise die Gesamtbetriebskosten $K(T) = \int_0^T k(t)dt$ für $T = 100$.

| $t$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k(t)$ | 0.50 | 0.67 | 0.85 | 1.02 | 1.18 | 1.33 | 1.48 | 1.60 | 1.75 | 1.92 | 2.12 |

**83)** Für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 1 + x - y^3, \ y(0) = 0$$

bestimme man die Lösung an der Stelle $x = 1$ nach dem Euler'schen Polygonzugverfahren, und zwar für die Schrittweiten (a) $h = 0.25$ sowie (b) $h = 0.1$.

**84)** Man verbessere die in Aufgabe 83 erhaltene Näherungslösung für die Schrittweite $h = 0.25$ durch Anwendung (a) des verbesserten Eulerverfahrens bzw. (b) des Runge-Kutta-Verfahrens.

**85)** Man finde näherungsweise die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = 2xy$ zum Anfangswert $y(0) = 2$ an der Stelle $x = 1$ und vergleiche den erhaltenen Wert mit der exakten Lösung $y(x) = 2 \cdot e^{x^2}$.

**86)** Man berechne für $y' = x + y^2$ und die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ mit dem Polygonzugverfahren die Werte $y(0.1)$ und $y(0.2)$.

**87)** Man bestimme für die Differentialgleichung $y' = axy$ mit $a \in \mathbb{R}$ für $a = -2$, $a = -1$ und $a = 1$ je 3 Strecken des Eulerschen Polygonzugs beginnend bei $P(1, 1)$ mit Schrittweite $\Delta x = 1$.

**88)** Gegeben sei das AWP $y' = x - y$, $y(0) = 1$. Man berechne die exakte Lösung und ermittle anschließend, wie groß $n$ (Anzahl der Teilintervalle) gewählt werden muß, damit der relative Fehler beim Polygonzugverfahren für $y(x)$ an der Stelle $x = 1$ maximal 15% beträgt.

**89)** Konstruieren Sie zum AWP $y' = \alpha y$, $y(0) = y_0$ den Eulerschen Polygonzug $E_n$ mit der Schrittweite $h = \xi/n$ auf dem Intervall $[0, \xi]$ (mit einem festen $\xi > 0$)und zeigen Sie, daß $E_n(\xi) \to y_0 e^{\alpha\xi}$ für $n \to \infty$.

**90)** In Analogie zu Aufgabe 89: Konstruieren Sie zum AWP $y' = 1 + y$, $y(0) = y_0$ den Eulerschen Polygonzug $E_n$ mit der Schrittweite $h = \xi/n$ auf dem Intervall $[0, \xi]$ (mit einem festen $\xi > 0$)und zeigen Sie, daß $E_n(\xi) \to y_0 e^{\alpha\xi}$ für $n \to \infty$. Konvergiert nun $E_n(\xi)$ ebenfalls gegen die exakte Lösung der Differentialgleichung?

**91)** Berechnen Sie vierstellige Runge-Kutta-Näherungswerte $y_1$, $y_2$ für die Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$, an den Stellen $x_1 = 0.1$ und $x_2 = 0.2$.

**92)** Man vergleiche das Euler-Verfahren und das Verfahren von Runge-Kutta für das AWP $y' = 1 + \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$ an der Stelle $x = 1.6$, wobei $n = 3$ gewählt werden soll. Lösen Sie das AWP auch exakt und ermittle jeweils den relativen Fehler für die einzelnen Verfahren.
Anmerkung: Nach Möglichkeit programmiere man die einzelnen Verfahren. Wenn "mit der Hand" gerechnet werden muß, wählen Sie $n = 1$.

93–94) Lösen Sie folgende Systeme von Differentialgleichungen, indem Sie diese durch geeignetes Einsetzen auf lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung zurückführen.

**93)**

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 - y_2 + t \\ y_2' &= y_1 - y_2 + t^2 \end{aligned} \qquad y_1(0) = -\frac{3}{8}, \quad y_2(0) = \frac{1}{8}$$

**94)**

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 + 4y_3 \\ y_2' &= 8y_1 + 3y_2 + 8y_3 \\ y_3' &= -8y_1 - 5y_3 \end{aligned}$$

Hinweis: Beachten Sie, daß die erste und dritte Gleichung unabhängig von der zweiten sind.

**95)** Man betrachte das folgende System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung für $x_1(t), x_2(t)$ mit vorgegebenen Anfangswerten:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 5x_2 + 1, & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 + x_2, & x_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Man löse nun dieses System auf folgende Weise (Eliminationsmethode). Zuerst elimiere man $x_2$ aus dem Gleichungssystem: Ableiten von

$$x_2 = \frac{-\dot{x}_1 + x_1 + 1}{5}$$

und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert für $x_1$ eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Man bestimme die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung für $x_1$ und danach durch Rücksubstitution auch die allgemeine Lösung für $x_2$. Anpassen an die Anfangsbedingungen liefert schließlich die gesuchte Lösung.

**96)** Man finde eine Lösung $u(x, y) = f(x)$ von $u_{xx} - u_y = 6x$ und eine Lösung $u(x, y) = g(y)$ von $u_{xx} - u_y = -2y$. Man ermittle mithilfe des Superpositionsprinzips eine Lösung von

$$u_{xx} - u_y = 18x + 8y.$$

97–108) Man löse die folgenden partiellen Differentialgleichungen.

**97)** $u_{xx} + u_x + x + y = 1$

**98)** $u_{xy} + u_x + x + y = 1, \qquad u(x,0) = 0, u(0,y) = 0.$

**99)** $u_{xy} + yu_x = 0, \qquad u(x,x) = x^2, u_x(x,x) = u_y(x,x).$

**100)** $xu_x - 2xu_y = u, \qquad u(1,y) = y^2.$

**101)** $(1+x)u_x - (1+y)u_y = 0$

**102)** $yu_x - xu_y = y^2 - x^2$

**103)** $xyu_x + u_y = xy\cos(x)$

**104)** $x^2u_x + yu_y + xyu = 1$

**105)** $3u_x + 2u_y - xyu = 0$

**106)** $u_x + 9u_y - xu = x$

**107)** $x^2u_x - 2u_y - xu = x^2$

**108)** $u_x + u_y - u = x$

**109)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen.

a) $xu_x + 2yu_y = 0.$
b) $xu_x - 2yu_y + u = e^x.$
c) $xu_x - xyu_y - u = 0.$
d) $yu_x - 4xu_y = 2xy.$

**110)** Bestimmen Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichungen aus Aufgabe 109 mit folgenden entsprechenden Bedingungen.

a) $u(x, 1/x) = x.$
b) $u(1,y) = y^2.$
c) $u(x,x) = x^2e^x.$
d) $u(x,0) = x^4.$

**111)** Gegeben sei die folgende partielle Differentialgleichung:

$$xu_x + 2yu_y = 0.$$

(*i*) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
(*ii*) Bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung, welche die folgende Bedingung erfüllt:

$$u\big(x, \frac{1}{x}\big) = x.$$

**112)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Rumpf-Differentialgleichung:

$$\frac{u_x}{x} + \frac{u_y}{y} + \frac{u_z}{z} = 0.$$

113–115) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen.

**113)** $9u_{xx} - \frac{1}{4}u_{yy} = \sin x.$

**114)** $12u_x + 4u_y = x.$

**115)** $u_{xx}^2 + u_{yy}^2 = 0$ (nur reelle Lösungen.)

**116)** Zeigen Sie, daß zum Lösen der partiellen Differentialgleichung

$$au_x + bu_y + cu_z = f(x,y,z), \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$$

die Substitution

$$\xi = x, \qquad \eta = bx - ay, \qquad \zeta = cx - az$$

zum Ziel führt. Bestimmen Sie damit die allgemeine Lösung der PDG

$$2u_x + 3u_y + 4u_z = e^{x+y+z}.$$

**117)** Man finde die allgemeine Lösung $u(x, y, z, t)$ der Differentialgleichung

$$u_t = u_x + 2u_y - u_z.$$

Welche Lösung erfüllt $u(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 + z^2$ ? Für welchen Punkt $(x, y, z)$ erfüllt die allgemeine Lösung $u(x, y, z, t) = 0$ zu einer festen Zeit $t$ ?

**118)** Eliminieren Sie mit Hilfe der Substitution $u(x, y) = v(x, y)e^{\lambda x + \mu y}$ und geeignete Wahl von $\lambda$ und $\mu$ die ersten Ableitungen aus der PDG

$$u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0.$$

Bemerkung: Die entstehende PDG müssen Sie nicht lösen.

**119)** Wie 118 für die PDG

$$u_{xy} = \alpha u_x + \beta u_y.$$

**120)** Man bestimme die allgemeine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$xu_x - yu_y = xy.$$

**121)** Man bestimme die allgemeine Lösung der Rumpf-Differentialgleichung

$$u_x + (y + 2z)u_y + zu_z = 0.$$

**122)** Man betrachte folgendes System von partiellen Differentialgleichungen für $z = z(x, y)$:

$$yz_x - xz_y = 0, \quad z_{xy} = 0.$$

Man bestimme nun alle Funktionen $z(x, y)$, welche dieses System lösen.
Anleitung: Man bestimme für eine der beiden partiellen Differentialgleichungen die allgemeine Lösung und setze in die andere Gleichung ein.

**123)** Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden linearen partiellen Differentialgleichung für $u(x, y)$:

$$(x^2 + 1)u_x - 2xyu_y + 2xu + 1 = 0.$$

**124)** Eine Funktion $u(x, y)$ heißt *homogen* vom Grad $n$, wenn

$$u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n u(x, y)$$

für alle $\lambda > 0$ und $x, y$ gilt. Durch Differenzieren dieser Beziehung nach $\lambda$ zeige man: falls $u$ eine stetig differenzierbare Funktion ist, genügt sie der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$xu_x + yu_y = nu.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung?

**125)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$yz_x - xz_y + xyz = 0$$

sowie jene Lösung, die die Parabel $z = y^2$ der $yz$-Ebene enthält.

**126)** Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden quasilinearen Differentialgleichung für $u(x, t)$ (konservative Burgers-Gleichung):

$$u_t + uu_x = 0.$$

**127)** Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden quasilinearen Differentialgleichung für $u(x, y)$:

$$(x + u)u_x + (y + u)u_y + u = 0.$$

Anleitung: Die durch den Ansatz $f(x, y, u) = \text{const}$ erhaltene Rumpf-Differentialgleichung

$$(x + u)f_x + (y + u)f_y - uf_u = 0$$

führt zum System von Phasen-Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{du} = -\frac{x+u}{u}, \quad \frac{dy}{du} = -\frac{y+u}{u},$$

welche beide über die Substitution $v = \frac{x}{u}$ bzw. $v = \frac{y}{u}$ implizit gelöst werden können.

**128)** Lösen Sie das AWP

$$u_t + u^2 u_x = 0, \qquad u(x,0) = f(x).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß eine implizite Lösung der Form $u = f(x - tg(u))$ existiert.

129–136) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen

**129)** $uu_x + u^2 u_y - z = 0$

**130)** $yu_x - xu_y = y^2 - x^2$

**131)** $u_x + 3u_y = u^2$

**132)** $x^2 u_x + uu_y = 1, \ u(x, 1-x) = 0, \ x > 0$

**133)** $u_x + y^2 u_y = \cos(u)$

**134)** $u_x - u_y = u^2$

**135)** $u_x - y^2 u_y = u$

**136)** $xu_x + u_y = e^u$

**137)** Man betrachte die homogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0.$$

Ermitteln Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = x^r$ eine Lösung $\phi_1(x)$. Eine zweite, unabhängige Lösung $\phi_2(x)$ bestimme man mittels Reduktionsansatz $y(x) = u(x)\phi_1(x)$. Beweisen Sie auch die Unabhängigkeit von $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$.

**138)** Man betrachte die inhomogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}.$$

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
Hinweis: Aus Beispiel 137 erhält man als Basis des Lösungsraums der homogenen Gleichung $\{\frac{1}{x}, \frac{\log x}{x}\}$.

**139)** Man klassifiziere die folgenden partiellen Differentialgleichungen nach „hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch“ und ermittle jeweils eine Normalform:

(a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0$, (b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + u = 0$,
(c) $3u_{xx} - 8u_{xy} + 4u_{yy} - u = 0$, (d) $u_{xy} + xyu_{xx} + u_y = 0$.

**140)** Man bestimme das Gebiet, in dem die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$$

hyperbolisch ist, und bestimme weiters die Normalform.

**141)** Bestimmen Sie die Normalform der Differentialgleichung

$$u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y + x + y + 1 = 0.$$

**142)** Man bringe folgende Gleichung auf Normalform und gebe die allgemeine Lösung an:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

**143)** Man wähle den Produktansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ und bestimme damit Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$x^2 u_{xy} + 3y^2 u = 0.$$

**144)** Man bestimme alle Lösungen der Form $u(x,y) = X(x)+Y(y)$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:
$$9u_{xx} + u_{yy} = 27u.$$

**145)** Man betrachte die Temperaturverteilung $u(x,t)$ eines Stabes der Länge $\ell$, welche an der Stelle $0 \le x \le \ell$ zur Zeit $t \ge 0$ durch die homogene Wärmeleitungsgleichung (mit einer vom Material abhängigen Konstanten $\alpha > 0$) beschrieben werden kann:
$$u_t = \alpha^2 u_{xx}.$$
Man löse nun mit Hilfe des Produktansatzes $u(x,t) = X(x)T(t)$ das folgende Rand-Anfangswert-Problem (für eine vorgegebene Funktion $f(x)$):
$$u(x,0) = f(x), \quad \text{für } 0 \le x \le \ell, \qquad u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad \text{für } t \ge 0.$$

**146)** Man berechne die Lösung $u(x,t)$ aus Aufgabe 145, wenn $\ell = 2$ und die Anfangsbedingung
$$f(x) = x + (2-2x)H(x-1),$$
lautet. (Zeichnen Sie zuerst die antisymetrische 4-periodische Funktion $f$; $H$ bezeichnet dabei die Heaviside Funktion).

**147)** Eine Saite, welche eine Schwingungsgleichung mit Parameter $c = 1$ erfülle, sei in $x = 0$ und $x = \pi$ eingespannt und liege zum Zeitpunkt $t = 0$ zur Gänze in der $x$-Achse. Der Geschwindigkeitszustand zu diesem Zeitpunkt sei durch $u_t = \frac{3}{4}(\sin x + \sin(3x))$ beschrieben. Wie sieht die Gestalt der Saite zu den Zeiten $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ aus? Wie lassen sich diese Ergebnisse interpretieren? (Betrachten Sie dazu auch die Geschwindigkeit in diesen Zeitpunkten)

**148)** Man finde (z.B. unter Zuhilfenahme der Formeln von Moivre) für die Funktionen
$$\sin^2 t, \cos^2 t, \sin^3 t, \cos^3 t$$
Darstellungen als trigonometrische Polynome der Periode $2\pi$.

**149)** Zeigen Sie die folgende Identität.
$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

**150)** Zeigen Sie, daß für je zwei Funktionen $f$ und $g$ aus der Menge $\{1/\sqrt{2}, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \ldots\}$ gilt:
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{falls } f \equiv g \\ 0 & \text{falls } f \ne g \end{cases}$$

**151)** Sei $f(t)$ eine auf $[0,T]$ stückweise stetige $T$-periodische Funktion $f(t)$. Man zeige, daß dann für die zu $f(t)$ gehörende Fourierreihe
$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \sim f(t)$$
der folgende Verschiebungssatz (Verschiebung im Frequenzbereich) gilt:
$$e^{in\omega t} f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-n} e^{ik\omega t}, \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**152)** Bestimmen Sie die (reelle und komplexe) Fourierreihe der $2\pi$-periodischen Funktion
$$f(t) = t, \qquad 0 \le t < 2\pi,\ 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

**153)** Bestimmen Sie die (reelle und komplexe) Fourierreihe der $2\pi$-periodischen Funktion

$$f(t) = t^2, \qquad 0 \le t < 2\pi,\ 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

**154)** Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der $2\pi$-periodischen Funktion

$$f(t) = t^2, \qquad -\pi \le t < \pi,\ 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Formeln:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

**155)** Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourierreihe aus Aufgabe 155 den Wert von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

**156)** Bestimmen Sie die (reelle und komplexe) Fourierreihe der $2\pi$-periodischen Funktion

$$f(t) = \cos t + |\cos t|.$$

**157)** Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \sin\frac{t}{2} & \text{für } 0 < t \le \pi \\ 1 + \cos\frac{t}{2} & \text{für } \pi < t \le 2\pi \end{cases}$$

mit periodischer Fortsetzung mit der Periode $2\pi$.

**158)** Sei $f(t)$ die $2\pi$-periodische Rechteckschwingung mit Amplitude 1: Auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ ist $f(t)$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi, \\ -1, & \pi \le t < 2\pi, \end{cases}$$

und außerhalb durch $2\pi$-periodische Fortsetzung. Zeigen Sie, daß die Fourierreihe $S_f(t)$ von $f(t)$

**159)** Unter Verwendung der in Aufgabe 158 bestimmten Fourierreihe der Rechteckschwingung $f(t)$ bestimme man die Fourierreihe der im Intervall $[0, 2\pi)$ folgendermaßen definierten $2\pi$-periodischen Funktion $g(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \pi, \\ 2\pi - t, & \pi \le t < 2\pi. \end{cases}$$

Anmerkung: Man vergleiche $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$ mit $g(t)$.

**160)** Zeigen Sie, daß für $-\pi/2 < x < \pi/2$ die folgende Identität gilt:

$$\frac{\cos 3x}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5\cdot 7\cdot 9} - \frac{\cos 9x}{7\cdot 9\cdot 11} + \cdots = \frac{\pi}{8}\cos^2 x - \frac{1}{3}\cos x$$

Gilt diese Identität auch in einem Intervall $(-a, a)$ mit $a > \pi/2$?
Hinweis: Entwickeln Sie $\cos^2 x$ in eine Fourierreihe.

**161)** Entwickeln Sie die Funktion $f(t) = \sin(at)$ ($a \notin \mathbb{Z}$) gegeben auf $[-\pi, \pi]$ mit periodischer Fortsetzung mit der Periode $2\pi$ in ihre reelle Fourierreihe.

**162)** Zeigen Sie, daß eine gerade $T$-periodische Funktion (d.h. $f(t) = f(-t)$) in ihrer reellen Fourierentwicklung keine Sinusterme enthalten kann.

**163)** Zeigen Sie, daß eine ungerade $T$-periodische Funktion (d.h. $f(t) = -f(-t)$) in ihrer reellen Fourierentwicklung keine Cosinusterme enthalten kann.

**164)** Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des $\cosh z$,

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

die Summe der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n)!}$$

Hinweis: Man fasse die Reihe als Realteil von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt + i \sin 2nt}{(2n)!}$ auf.

**165)** Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des $\cosh z$,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

die Summe der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)!}$$

**166)** Man entwickle die Funktion

$$g(t) = e^t, \quad 0 \leq t < T$$

in eine reine Cosinusreihe, d.h., man bestimme die (gewöhnliche) Fourier-Reihe der $2T$-periodischen Funktion $h(t)$, welche die gerade $2T$-periodische Fortsetzung von $g(t)$ darstellt:

$$h(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < T, \\ g(-t), & -T < t < 0, \end{cases} \qquad h(t + 2T) = h(t).$$

**167)** Man entwickle die Funktion

$$f(t) = \sin t, \quad 0 \leq t < \pi$$

in eine Fourier-Cosinusreihe, indem man $f(t)$ gerade mit Periode $T = 2\pi$ fortsetzt und die (gewöhnliche) Fourier-Reihe berechnet.

**168)** Sei $f(x) = e^{i\beta x}$ für $-\pi \leq x \leq \pi$, wobei $\beta$ eine reelle, jedoch keine natürliche Zahl ist. Man zeige unter Verwendung der Parseval'schen Gleichung für komplexe Fourier-Reihen, dass

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(\beta - m))}{(\beta - m)^2} = \pi^2.$$

**169)** Man zeige mit Hilfe des Weierstraß'schen $M$-Tests (Satz 8.10), dass unter der Voraussetzung $s > 0$ die folgende Reihe gleichmäßig auf $[0, \infty)$ konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-st}(-1)^k u\big(t - \frac{kT}{2}\big).$$

Bemerkung: $u(t)$ bezeichnet die Heavisidefunktion.

**170)** Man zeige die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1 + 2nx}}$$

im Intervall $[0, \infty)$.

**171)** Man zeige die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt[n]{1 + x^2}}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

**172)** Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ gegen eine stetige Grenzfunktion $f(x)$ konvergiert und berechnen Sie

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx.$$

**173)** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $T > 0$. Untersuchen Sie, ob die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(a_n x)$$

auf dem Intervall $[-T, T]$ gleichmäßig konvergiert.

**174)** Entwickeln Sie die Funktion $f(t) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ mit periodischer Fortsetzung mit Periode $2\pi$ in ihre reelle Fourierreihe.

**175)** Sei $a \notin \mathbb{Z}$. Entwickeln Sie $f(t) = \pi \cos(at)$, $0 \leq t < 2\pi$, mit $2\pi$-periodischer Fortsetzung in eine Fourierreihe und beweisen Sie durch geeignete Wahl von $t$ die Identität

$$\frac{\pi}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2 - 1} + \frac{2a}{a^2 - 4} - \frac{2a}{a^2 - 9} + \frac{2a}{a^2 - 16} - \cdots$$

**176)** Man zeige, daß für die Fouriermatrix $F_N$, gegeben durch

$$F_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

mit $w = e^{2\pi i/N}$, gilt:

$$F_N \cdot \overline{F_N} = N \cdot E_N.$$

Dabei bezeichnet $\overline{F_N}$ die konjugierte Matrix und $E_N$ die $N \times N$-Einheitsmatrix.

**177)** Man zeige unter Verwendung von Bsp. 176, daß zwischen den Funktionswerten $y_j$, $j = 0, \ldots, N-1$ und den Spektralkoeffizienten $c_k$, $k = 0, \ldots, N-1$ folgende Beziehung gilt, die sogenannte Parsevalsche-Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |y_j|^2.$$

**178)** Man zeige die folgenden Verschiebungsformeln einer diskreten periodischen Funktion $\vec{y} \in \mathbb{C}^N$:

$$\begin{array}{rcc} \text{Verschiebung im Zeitbereich:} & (y_{k+n})_k & \xrightarrow{DFT} (w^{kn} c_k)_k, \\ \text{Verschiebung im Frequenzbereich:} & (w^{kn} y_k)_k & \xrightarrow{DFT} (c_{k-n})_k. \end{array}$$

**179)** Gesucht ist das (eindeutig bestimmte) trigonometrische Polynom

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

von minimalem Grad $n$, welches im Intervall $[0, 2\pi]$ an den drei Stützstellen $t_j = \frac{2\pi j}{3}$, für $j = 0, 1, 2$, die vorgegebenen Funktionswerte $f(t_j) = y_j$ annimmt:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wie lautet das trigonometrische Polynom in der Sinus-Cosinus-Form?

**180)** Seien $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ und $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{C}^N$ ihre Spektralwerte. Außerdem bezeichne $(x_k)_k$ die $N$-periodische Fortsetzung des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ sowie $w = e^{2\pi i/N}$. Zeigen Sie, daß für die sogenannte *periodische Faltung* gilt:

$$\mathbf{y} * \mathbf{z} := \left( \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell z_{k-\ell} \right)_k \xrightarrow{DFT} (c_k \cdot d_k)_k$$

**181)** Berechnen Sie die Spektralkoeffizienten des $N$-periodischen diskreten Rechteckimpulses $(x_k)_k$ mit $x_0 = x_{N-1} = 1$ und $x_j = 0$ für $j = 1, 2 \ldots, N-2$.

**182)** Man berechne die Spektralkoeffizienten $c_k$, $0 \le k \le N-1$, für die diskrete Rechteckfunktion $\vec{y} = (y_0, \ldots, y_{N-1})^T$, wobei $N = 2M$ als gerade vorausgestzt wird, mit

$$y_j = \begin{cases} 1, & 0 \le j \le \frac{N}{2} - 1, \\ 0, & \frac{N}{2} \le j \le N-1. \end{cases}$$

**183)** Sei $N$ durch 3 teilbar, also $N = 3M$. Man berechne die Spektralkoeffizienten $c_k$, $0 \le k \le N-1$, für die diskrete $N$-periodische Funktion, welche durch den Vektor $\mathbf{y} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0)$ beschrieben wird.

**184)** Führen Sie für $\mathbf{y} = (0, 1, 2, 3)$ die FFT explizit durch.

**185)** Man betrachte die diskrete $N$-periodische Funktion, welche durch den Vektor $\vec{y} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0)^T$ beschrieben wird, wobei $N$ durch 3 teilbar sein muß, also $N = 3M$ mit $M \in \mathbb{N}$ gilt. Man berechne nun die Spektralkoeffizienten $c_k$, mit $0 \le k \le N-1$, von $\vec{y}$.

**186)** Berechnen Sie das Produkt der beiden Polynome $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ und $q(x) = 4x^3 + x^2 + 2x + 3$ mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation.

**187)** Unter der generellen Voraussetzung, daß $f(t)$ absolut integrierbar ist, zeige man folgende Rechenregeln für die Fourier-Transformation ($F(\omega)$ bezeichne die Fourier-Transformierte von $f(t)$).

(1) Streckung: Für $c \neq 0$ gilt:

$$\mathcal{F}\big\{f(ct)\big\} = \frac{1}{|c|} F\Big(\frac{\omega}{c}\Big).$$

(2) Differentiation im Zeitbereich: Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar und ist weiters $f'(t)$ Fourier-transformierbar, so gilt:

$$\mathcal{F}\big\{f'(t)\big\} = i\omega F(\omega).$$

**188)** Unter der generellen Voraussetzung, daß $f(t)$ absolut integrierbar ist, zeige man folgende Rechenregeln für die Fourier-Transformation ($F(\omega)$ bezeichne die Fourier-Transformierte von $f(t)$).

(1) Streckung: Für $c \neq 0$ gilt:

$$\mathcal{F}\big\{f(ct)\big\} = \frac{1}{|c|} F\big(\frac{\omega}{c}\big).$$

(2) Verschiebung im Zeitbereich:

$$\mathcal{F}\big\{f(t-a)\big\} = e^{-i\omega a} F(\omega), \quad \text{für } a \in \mathbb{R}.$$

**189)** Berechnen Sie die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**190)** Berechnen Sie die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**191)** Zeigen Sie: Falls $f(t)$ eine gerade Funktion ist, dann kann die Fouriertransformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ durch

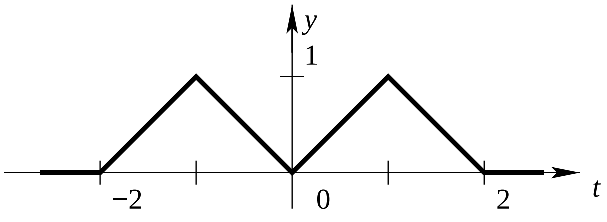
$$F(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\,dt$$

berechnet werden.

**192)** Man zeige: falls $f(t)$ eine ungerade Funktion ist, also $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dann kann die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ wie folgt berechnet werden:

$$F(\omega) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)dt.$$

**193)** Unter Berücksichtigung von Beispiel 191 berechne man die Fouriertransformierte für die im Buch auf Seite 385 skizzierte Zeitfunktion $y = f(t)$:



**194)** Man zeige: falls $f(t)$ eine ungerade Funktion ist, also $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dann kann die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ wie folgt berechnet werden:

$$F(\omega) = -2i \int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)dt.$$

**195)** Man löse mit Hilfe der Fourier-Transformation folgende Integralgleichung vom Fredholm-Typ für $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|} x(\tau)d\tau = \frac{1}{1+t^2}.$$

**196)** Man bestimme die Laplacetransformierten der folgenden Funktionen.

a) $e^{6t+2}$

b) $f(t) = 1 + 2t + 3t^2$

**197)** Man bestimme die Laplacetransformierten der folgenden Funktionen.

a) $f(t) = \int\limits_0^t \tau \sin(\tau)\, d\tau$

b) $f(t) = \sin^3(t)$
Anleitung: Man bestimme Konstanten $a$, $b$, sodaß $\sin^3(t) = a\sin(3t) + b\sin(t)$ mit Hilfe der Summensätze oder der Moivre-Formeln.

**198)** Man beweise folgende Skalierungseigenschaft der Laplace-Transformation:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{s}{a}\right)$$

und berechne die Laplace-Transformierten folgender Funktionen:

a) $t\cos(6t)$,
b) $t^2\cos(7t)$.

199–200) Lösen Sie folgende AWP mittels Laplacetransformation.

**199)**

$$y'' + 3y' + 2y = 6e^{-x}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.$$

**200)**

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 6\sinh 2x, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 4.$$

**201)** Man löse mit Hilfe der Laplace-Transformation die folgende partielle Differentialgleichung unter den vorgegebenen Nebenbedingungen:

$$xu_x + u_t = xt, \quad u(0,t) = 0 \text{ für } t \geq 0, \quad u(x,0) = 0 \text{ für } x \geq 0.$$

Anleitung: Die Laplace-Transformation bezüglich $t$ liefert für $U(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$xU_x + sU = \frac{x}{s^2}.$$

Lösen dieser Differentialgleichung und Berücksichtigen der Anfangswerte liefert nach der Rücktransformation die gesuchte Lösung.

202–203) Berechnen Sie die folgenden Faltungsprodukte und ihre Laplacetransformierten.

**202)**

a) $1 * 2$
b) $e^t * e^{2t}$

**203)**

a) $\sin t * \cos 2t$

b) $u(t-1) * t$

Mit $u(t)$ wird die Heavisidefunktion bezeichnet.

**204)** Man zeige mittels partieller Integration, daß

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+),$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $f(t)$, $f'(t)$ Laplace-transformierbar sind und $f(t)$ auf $(0,\infty)$ stetig ist. Mit $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$ wird die Laplace-Transformierte von $f(t)$ bezeichnet und $f(0^+)$ bezeichnet den rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{t\to 0, t>0} f(t)$.

**205)** Man löse die Integralgleichung:

$$x(t) = t^2 + \int_0^t x(y)\sin(t-y)dy.$$

**206)** Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformierten die folgende Differential-Integralgleichung.

$$\dot{x}(t) + \int_0^t x(\tau)\cosh(t-\tau)\,d\tau = 0, \quad x(0) = 1.$$

Bemerkung: $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

**207)** Man löse mit Hilfe der $L$-Transformation folgendes AWP (lineare Dgl. mit nichtkonstanten Koeffizienten):

$$y'' + ty' - y = 0, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1.$$

Anmerkung: Durch die $L$-Transformation erhält man im Bildbereich eine lineare Dgl. 1. Ordnung. Die in der allgemeinen Lösung auftretende Konstante bestimme man dadurch, daß $Y(s)$ die Laplace-Transformierte der $L$-transformierbaren Fkt. $y(t)$ sein soll und daher $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ gelten muß.

**208)** Zeigen Sie: Ist $f(t)$ eine periodische Funktion mit Periode $p$, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $f(t+p) = f(t)$, dann gilt

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt$$

Hinweis: Verwenden Sie $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{np}^{(n+1)p} f(t)e^{-st}\,dt$ und substituieren Sie in geeigneter Weise.

**209)** Man berechne folgende Laplace-Urbilder:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+3}{s(s-1)(s+2)}\right)$.

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s-1}{s^2+2s-8}\right)$.

c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3s+7}{s^2-2s+5}\right)$.

d) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-7s}}{(s+3)^3}\right)$.

**210)** Man löse das AWP

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \quad y(0) = -9, \;\; y'(0) = 6$$

(1) mittels Ansatzmethode,

(2) mittels Laplace-Transformation.

**211)** Man löse das AWP

$$y'' - 8y' + 16y = e^{3x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

(1) mittels Ansatzmethode,
(2) mittels Laplace-Transformation.

**212)** Man betrachtet einen $RLC$-Reihenschwingkreis unter konstanter Spannung $U(t) = 300$ Volts. Die Werte sind dabei $R = 160$ Ohms für den Widerstand, $L = 2$ Henry für die Induktivität und $C = 0.02$ Farad für die Kapazität. Man schreibe die entsprechende Differentialgleichung 2. Ordnung für die Ladung $Q(t)$ und löse sie mit Hilfe der Laplace-Transformation (Strom und Ladung sind bei $t = 0$ als null anzunehmen). Man zeichne anschliessend den Strom $j(t)$ für $t \geq 0$.

**213)** Man löse Aufgabe 212, wenn der Schwingkreis von der oszillierenden Spannung $U(t) = 100\sin(3t)$ angeregt wird. Man zeige somit, dass sich der Strom $j(t)$ für grosse Zeiten annähernd wie die oszillierende Funktion $A\sin(3t + \phi)$ verhält, wo $A$ und $\phi$ zu bestimmen sind.

214–217) Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mit Hilfe der Laplacetransformation.

**214)**

$$xy'' + y' + 2xy = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Bemerkung: Die Formel $\mathcal{L}(J_0(at)) = 1/\sqrt{z^2 + a^2}$ darf ohne Beweis verwendet werden.

**215)**

$$\begin{aligned} y_1' + 2y_2 &= e^x \\ y_2' + 2y_1 &= e^{-x} \end{aligned} \qquad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

**216)**

$$\begin{aligned} y_1'' + y_2' + 3y_1 &= 1 \\ y_2'' - 4y_1' + 3y_2 &= 0 \end{aligned} \qquad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1'(0) = y_2'(0) = 0$$

**217)**

$$y'' + 4y = f(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } & 0 < t \leq \pi \\ 0 \text{ für } & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

und periodischer Fortsetzung, also $f(t + 2\pi) = f(t)$.

**218)** Zeigen Sie, daß die Laplacetransformierte $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq t < \log\log 3 \\ (-1)^n e^{e^t/2} & \text{für } \log\log n \leq t < \log\log(n+1) \end{cases}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ existiert. $F(s)$ muß nicht berechnet werden.
Bemerkung: $\log x$ bezeichnet den natürlichen Logarithmus von $x$.
Hinweis: Spalten Sie das Laplace-Integral in geeigneter Weise auf, sodaß eine Reihe entsteht, auf die das Leibnizkriterium anwendbar wird.

**219)** Man bestimme die Urbilder $f(t)$ der angegebenen Laplace-Transformierten $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$:

(1) $F(s) = \ln \frac{s^2+1}{(s-1)^2}$,
(2) $F(s) = \frac{e^{-2s} - e^{-4s}}{s}$.

Anmerkung: Man beachte $-\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}\{tf(t)\}$ resp. betrachte die Laplace-Transformierte der Heavisidefunktion.