Prüfung aus Mathematik (2) für BI

am 2.5.2002

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Bestimmen Sie ein komplexes und ein reelles Fundamentalsystem sowie die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y''' - y = 0$ (Hinweis zur Kontrolle: die charakteristischen Zahlen lauten $\lambda = 1,\ -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$).

b) Das zugehörige Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ hat die Begleitmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Geben Sie die zum Eigenwert $\lambda = 1$ gehörige Fundamentallösung an.

c) Wie lautet der *<u>Ansatz</u>* für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\,\mathrm{e}^x$, wobei $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^3$ ein konstanter Spaltenvektor ist.

2.) Lösen Sie die autonome Differentialgleichung $y''\,y = y'$. Es ergibt sich dabei eine zweiparametrige Lösungsschar. Bestimmen Sie jene Lösungskurve $y = y(x)$, die durch den Punkt $(1,1)$ geht und dort die Steigung $y'(1) = 1$ hat (Hinweis: Die zweite DG $\frac{dy}{dx} = z(y)$ lässt sich nicht mehr integrieren, man muss die Lösung in der Form $x = x(y) = \int \frac{1}{z(y)}\,dy + c$ stehen lassen).

3.) a) Berechnen Sie bezüglich der z-Achse das polare Trägheitsmoment des dreidimensionalen Bereichs unter der Rotationsfläche $z = f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$, $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$, also den Wert des Integrals $J = \iint_{\boldsymbol{R}^2} (x^2+y^2) f(x,y)\,dxdy$ (Anleitung: Übergang auf Polarkoordinaten, partielle Integration mit $u = r^2$, $v' = r\mathrm{e}^{-r^2/2}$; Resultat: $J = 2$).

b) $f(x,y)$ ist die Dichte der zweidimensionalen Gaußschen Standard-Normalverteilung. Welche Bedeutung hat das Resultat aus a) im Zusammenhang mit dieser Verteilung?

4.) Die Basispolynome $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k, \ldots\} = \{1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots\}$ bilden ein vollständiges (nicht-orthogonales) Funktionensystem auf dem Intervall $I = [0,1]$.

Berechnen Sie das lineare Polynom $s_1 = c_0\psi_0 + c_1\psi_1 = c_0 + c_1 x$, das im Sinne des Integralmittels $\|f - s\|^2 = \int_0^1 (f(x) - s(x))^2\,dx$ die kleinste Abweichung von der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ $(x \in I)$ hat.

5.) Die Grundschwingungsmoden $v(x,y)$ einer rechteckigen Platte sind durch die Helmholtzgleichung $\Delta^2 v(x,y) = v_{xxxx} + 2v_{xxyy} + v_{yyyy} = \mu^4\,v$ bestimmt. Für die von y unabhängigen Schwingungszustände einer Platte der Länge π, die bei $x = 0$ und $x = \pi$ gelenkig eingespannt ist, hat man für $v = v(x)$ das Randwertproblem $v^{(4)} = \mu^4\,v$, $v(0) = v''(0) = v(\pi) = v''(\pi) = 0$ zu lösen.

a) Geben Sie die allgemeine Lösung dieser DG für $v(x)$ an und schreiben Sie das lineare Gleichungssystem an, das sich bei Anpassung an die 4 RB ergibt (nicht lösen!).

b) Unter Verwendung des Resultats aus a) erhält man als Lösung der Schwingungsgleichung die Reihendarstellung $u(x;t) = \sum T_k(t) v_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos k^2 ct + B_k \sin k^2 ct\right) \sin kx$.

Wie passt man diese (im Prinzip) an die Anfangsbedingungen $u(x;0) = f(x)$, $u_t(x;0) = g(x)$ an?