

Prüfung aus Mathematik (2) für BI

am 6. 3. 2003

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Mat.Nr.:

1.) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) mittels EW-EV-Methode,

b) mit Hilfe der Formel $\mathbf{y} = e^{At}\mathbf{c}$, indem Sie die Exponentialmatrix e^{At} explizit ausrechnen.
Vergleichen Sie die beiden Resultate.

2.) Das Vektorfeld $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ ist auf der oberen Halbebene $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ zu betrachten.

a) Überzeugen Sie sich, dass die drei hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Potentialfunktion auf G erfüllt sind. Kurvenintegrale über geschlossene Kurven auf G verschwinden daher.

b) Womit hängt es zusammen, dass das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{u} \, d\mathbf{x}$ über den Einheitskreis C mit Mittelpunkt im Ursprung nicht verschwindet? Bestätigen Sie, dass sein Wert 2π beträgt.

3.) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment J des Zylinders $Z : x^2 + z^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ in bezug auf die z -Achse. Hinweis: Es ist das Integral $J = 4 \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) \, dz \, dy \, dx$ auszurechnen.

4.) Mit Hilfe des Lagrangeschen Multiplikators ist das Minimum der Funktion $f(x, y) = x^4(x^2 - y^2)$ ($x, y > 0$) unter der Nebenbedingung $x(x + y) = 1$ zu bestimmen.

5.) Bestimmen Sie die Temperaturverteilung $u(r, \varphi; t)$ in einer kreisförmigen Platte mit Radius 1, deren Rand auf 0° gehalten wird. Die RB lautet also $u(1, \varphi; t) = 0$ ($\varphi \in (0, 2\pi)$; $t > 0$). Wie passt man (im Prinzip) die Lösung an eine AB $u(r, \varphi; 0) = f(r, \varphi)$ an?

Anleitung: Zu lösen ist die DG $u_t = c^2 \Delta u$ (Laplaceoperator in Polarkoordinaten) mit Separationsmethode. Die Vorgangsweise ist dabei genau wie bei der Lösung der Schwingungsgleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$ für die kreisförmige Membran; lediglich der Zeitterm fällt anders aus.