Prüfung aus Mathematik (2) für BI

am 9. 5. 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Das Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte 0, 0, 1 (nicht nachrechnen). Geben Sie drei Fundamentallösungen an.

b) Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}\,\mathrm{e}^t$, wobei $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^3$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) Gegeben seien die Punkte $\left\{ \begin{array}{rcl} (x_1, y_1) & = & (0,3) \\ (x_2, y_2) & = & (1,1) \\ (x_3, y_3) & = & (2,2) \\ (x_4, y_4) & = & (3,0) \end{array} \right\}$. Bestimmen Sie die "Regressionsgerade", also die Gerade $y = y(x) = a + bx$, für die $f(a,b) = \sum_{k=1}^{4} (a + bx_k - y_k)^2$ minimal wird.

3.) Stellen Sie für die Kurvenschar $y^2 = x + c$ die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ auf, der sie genügt, und lösen Sie dann die Differentialgleichung $y' = -1/f(x,y)$ der Orthogonaltrajektorien, also der Kurven, die alle Scharkurven rechtwinklig schneiden; die Linienelemente der beiden Scharen stehen paarweise aufeinander senkrecht. Skizzieren Sie von jeder Schar einige Linienelemente.

4.) Gegeben sei das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (y, z, x)^t$,
a) Überzeugen Sie sich, dass dieses die Strömung einer inkompressiblen Substanz beschreibt.
b) Berechnen Sie den Durchsatz pro Zeiteinheit durch das Dreieck D mit den Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, also das Oberflächenintegral $\iint_D \boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{O}$.

5.) Wenden Sie das Ritzverfahren zur Bestimmung des Durchhangs $u(x)$ eines beladenen, beidseitig fest eingespannten Seils unter Gleichlast $f(x) = 1$. Zu behandeln ist also die Poissonsche Differentialgleichung

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{mit RB.} \quad u(0) = u(1) = 0 \ .$$

Als Basisfunktionen für die Ritzapproximierenden $s_m(x)$ wählen Sie die Eigenfunktionen $\varphi_k(x) = \sin k\pi x$ $(k \in \boldsymbol{N})$ des Randwertproblems $-\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$ mit RB. $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Die φ_k bilden bekanntlich ein vollständiges Orthogonalsystem bezüglich des Energieskalarprodukts

$$[g,h] = \langle g, Ah \rangle = \langle g, -h'' \rangle = \int_0^1 g(x)(-h''(x))\,dx = \int_0^1 g'(x)h'(x)\,dx = \langle g', h' \rangle$$

und auch bezüglich des gewöhnlichen Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle$.