Prüfung aus Mathematik (2) ALT für BI

am 12. 12. 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Führen Sie das homogene Differentialgleichungssystem $x'' = y,\ y' = x$ auf ein System erster Ordnung der Form $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit einer (3×3)-Matrix A zurück und bestimmen Sie die zum reellen Eigenwert von A gehörige Fundamentallösung dieses (3×3)-Systems.
(Hinweis: Setzen Sie $y_1 = x$, $y_2 = x'$, $y_3 = y$).

b) Die komplexen Eigenwerte der Matrix A aus a) sind $-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t$, wobei $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^3$ ein konstanter Spaltenvektor ist.

2.) Bestimmen Sie die Knicklasten P_k für einen rechts (bei $x = \ell$) horizontal eingespannten und links (bei $x = 0$) reibungs- und momentenfrei abgestützten Stab der Länge ℓ (Lösen Sie die linearisierte DG des Eulerschen Knickstabs mit den entsprechenden Randbedingungen).

3.) a) Die Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ nimmt unter der Nebenbedingung $xyz = 1$ im ersten Oktanten $(x > 0, y > 0, z > 0)$ ein einziges relatives (und gleichzeitig absolutes) Minimum an. Berechnen Sie dessen Wert sowie die Stelle (x_0, y_0, z_0), an welcher es angenommen wird.

b) Beweisen Sie die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel
$\dfrac{u+v+w}{3} \geq \sqrt[3]{uvw} \quad (u, v, w > 0)$. Anleitung: Setzt man $x = \dfrac{u}{\sqrt[3]{uvw}}$, $y = \dfrac{v}{\sqrt[3]{uvw}}$, $z = \dfrac{w}{\sqrt[3]{uvw}}$,
so kann man auf das Resultat aus a) zurückgreifen.

4.) Der Greensche Satz ist am Beispiel $\displaystyle\int_C -y\,dx + x\,dy$ nachzuprüfen, worin C den Rand des von $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$ begrenzten Gebietes bezeichnet.

---

5) Eine am Rand eingespannte kreisförmige Membran hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form $w(r, \varphi, 0) = J_1(\dfrac{\alpha_{12}}{R}r) \sin\varphi$ und wird losgelassen, d.h. $w_t(r, \varphi, 0) = 0$. In welcher Position befindet sich der Punkt mit den Polarkoordinaten (r, φ) zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$?

Hinweis: Die Anpassung an die Anfangsbedingungen ist hier einfach, da $w(r, \varphi, 0)$ eine Grundschwingungsmode ist.

Prüfung aus Mathematik (2) NEU für BI

am 12. 12. 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Führen Sie das homogene Differentialgleichungssystem $x'' = y,\ y' = x$ auf ein System erster Ordnung der Form $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit einer (3×3)-Matrix A zurück und bestimmen Sie die zum reellen Eigenwert von A gehörige Fundamentallösung dieses (3×3)-Systems.
(Hinweis: Setzen Sie $y_1 = x$, $y_2 = x'$, $y_3 = y$).

b) Die komplexen Eigenwerte der Matrix A aus a) sind $-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Wie lautet der *Ansatz* für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t$, wobei $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^3$ ein konstanter Spaltenvektor ist.

2.) Bestimmen Sie die Knicklasten P_k für einen rechts (bei $x = \ell$) horizontal eingespannten und links (bei $x = 0$) reibungs- und momentenfrei abgestützten Stab der Länge ℓ (Lösen Sie die linearisierte DG des Eulerschen Knickstabs mit den entsprechenden Randbedingungen).

3.) a) Die Funktion $f(x,y,z) = x+y+z$ nimmt unter der Nebenbedingung $xyz = 1$ im ersten Oktanten $(x > 0, y > 0, z > 0)$ ein einziges relatives (und gleichzeitig absolutes) Minimum an. Berechnen Sie dessen Wert sowie die Stelle (x_0, y_0, z_0), an welcher es angenommen wird.
b) Beweisen Sie die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel
$\frac{u+v+w}{3} \geq \sqrt[3]{uvw}$ $\quad (u,v,w > 0)$. Anleitung: Setzt man $x = \frac{u}{\sqrt[3]{uvw}}$, $y = \frac{v}{\sqrt[3]{uvw}}$, $z = \frac{w}{\sqrt[3]{uvw}}$,
so kann man auf das Resultat aus a) zurückgreifen.

4.) Zwei Messgrößen x und y seien unabhängig und normalverteilt, x mit $Mittel = 100$, $Varianz = 16$, und y mit $Mittel = 94$, $Varianz = 9$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P dafür, dass die Differenz positiv ist, dass also bei einer Beobachtung der Wert $x - y$ positiv ausfällt.

---

5) Eine am Rand eingespannte kreisförmige Membran hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form $w(r,\varphi,0) = J_1(\frac{\alpha_{12}}{R}r)\sin\varphi$ und wird losgelassen, d.h. $w_t(r,\varphi,0) = 0$. In welcher Position befindet sich der Punkt mit den Polarkoordinaten (r,φ) zum Zeitpunkt $t \in I\!R$?

Hinweis: Die Anpassung an die Anfangsbedingungen ist hier einfach, da $w(r,\varphi,0)$ eine Grundschwingungsmode ist.