

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!

Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Das Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat den vierfachen

Eigenwert 1 (nicht nachrechnen). Bestätigen Sie, dass drei unabhängige Eigenvektoren existieren. Schreiben Sie die zugehörigen Fundamentallösungen an und bestimmen Sie eine vierte unabhängige Fundamentallösung.

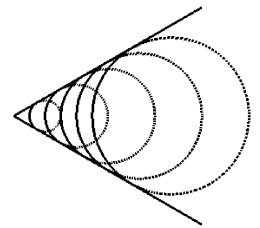
b) Wie lautet der Ansatz für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{r}e^t$, wobei $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^4$ ein konstanter Spaltenvektor ist.

2.) a) Bestätigen Sie, dass die parabolischen Punkte (x, y, z) der Fläche $z = \sin \pi x \sin \pi y$ genau jene über den Geraden $x - y = m + \frac{1}{2}$ und $x + y = n + \frac{1}{2}$ ($m, n \in \mathbf{Z}$) sind.

b) Bestätigen Sie ferner, dass $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Stelle eines relativen (und gleichzeitig absoluten) Extremums der Fläche ist.

3.) a) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \frac{1}{3y} (x - 2\sqrt{x^2 - 3y^2}) = f(x, y) \dots (*)$

(Anleitung: Substituieren Sie für den Radikanden $w(x) = x^2 - 3y^2$; wegen $3yy' - x = -\frac{w'}{2}$ erhalten Sie die neue DG $\frac{w'}{2\sqrt{w}} = 2$, die nun leicht zu integrieren ist. Rücksubstituieren führt auf die Kreisschar $(x - 2r)^2 + y^2 = r^2$ (diese Kreise beschreiben die Wellenfronten, die sich hinter einem Überschallflugzeug bilden, das mit doppelter Schallgeschwindigkeit fliegt; siehe Abb.)



b) Überzeugen Sie sich durch Einsetzen in die DG (*), dass die beiden Geraden $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ und $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ ebenfalls (singuläre) Lösungen der DG sind (die beiden Geraden bilden den sogenannten "Machkegel", sie sind Einhüllende der Kreisschar und gehören dieser nicht an. Jeder Punkt auf dem Machkegel ist also Verzweigungspunkt: durch jeden solchen Punkt geht mehr als eine Lösung). Begründen Sie aus dem Verhalten der Fläche $z = f(x, y)$, warum die Voraussetzungen des Picardschen Eindeutigkeitssatzes nur im Inneren des Machkegels erfüllt sind (*Hinweis*: Beachten Sie das Verhalten von f_y auf den einhüllenden Geraden).

4.) Bestimmen Sie die Fourierreihe zur Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & \dots & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \dots & -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

(Periode 2π). Die Parsevalsche Gleichung vereinfacht sich in diesem Fall zu $\|f\|^2 = \pi(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2)$

(warum?). Gewinnen Sie aus dem obigen Resultat eine Reihendarstellung für π^2 .

5.) Bestimmen Sie die Temperaturverteilung $u(x, y; t)$ in einer quadratischen Platte der Seitenlänge 1, deren Rand auf 0 Grad gehalten wird

Anleitung: Zu lösen ist die DG. $u_t = c^2 \Delta u$ mit Separationsmethode. Die Vorgangsweise ist dabei genau wie bei der Lösung der Schwingungsgleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$ für die quadratische Membran; lediglich der Zeitterm fällt anders aus.