Prüfung aus Mathematik 1 für Bauingenieurwesen

am 14. Oktober 2016

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Re} z < 4,\ \arg z \in (0, \tfrac{\pi}{4})\}.$$

Geben Sie für ein konkretes $z_0 \in M$ Ihrer Wahl den Real- und Imaginärteil von z_0 sowie die zu z_0 konjugiert komplexe Zahl an.

(b) Formulieren Sie den Fundamentalsatz der Algebra (ausführlich)!

2. (a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie die Definition der *Ableitung* von f an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ an und erklären Sie mit Hilfe einer aussagekräftigen Skizze ihre Bedeutung.

(b) Verwenden Sie den Differentialquotienten zum Beweis der bekannten Differentiationsregel

$$(x^2)' = 2x.$$

(c) Bestimmen Sie für $x > 0$ die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2 + 1}.$$

3. (a) Formulieren Sie (ausführlich) den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen:

$$F_1(x) := \int_{17}^{x} f(t)\, dt, \qquad F_2(x) := \int_{x}^{42} f(t)\, dt, \qquad F_3(x) := \int_{17}^{2x} f\left(\tfrac{t}{2}\right)\, dt.$$

Welche dieser Funktionen sind Stammfunktionen von f?

4. Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}(x-1)^{2n}.$$

(a) Ermitteln Sie den genauen Konvergenzbereich der Potenzreihe.

(b) Bestimmen Sie durch Vergleich mit der geometrischen Reihe die Summenfunktion der Potenzreihe auf ihrem Konvergenzbereich.