

**Prüfung aus Mathematik 1 für BI**

**am 3. März 2006**

Zuname: .....

Vorname: .....

Kennzahl / Mat.Nr.: .....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!

Arbeitszeit: 150 Minuten!

1.) a) Bestätigen Sie, dass für jede natürliche Zahl  $m$  die Identität  $\sum_{k=0}^{8m-2} e^{\frac{k\pi i}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$  gilt.

(Hinweis: endliche geometrische Reihe)

b) Was versteht man unter dem Betrag und dem Argument einer komplexen Zahl? Was ist über die komplexen Zahlen  $\sqrt[n]{-1}$  zu sagen?

2.) Leiten Sie die (vollständige) McLaurinreihe zur Funktion  $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  aus den bekannten Reihen für  $\frac{1}{1-x}$  und  $\frac{1}{1+x}$  her und geben Sie ihren Konvergenzradius an. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Ursprung und die der Schmiegeparabel dritter Ordnung? Welche Bezeichnung ist für die Funktion  $f(x)$  eingeführt? Für welche Werte von  $x$  ist sie definiert? Skizzieren Sie ihr Schaubild. (Zusatzpunkte für die Angabe der Funktionalgleichung, der  $f(x)$  genügt).

3.) a) Diskutieren Sie ausführlich die Funktion  $f(x) = xe^{-x}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ). Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung und bestimmen Sie die Monotonieintervalle von  $f(x)$  und  $f'(x)$  sowie das Verhalten beider Funktionen bei  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$ . Entscheiden Sie, ob es absolute Extrema und Wendepunkte gibt. Skizzieren Sie die Schaubilder von  $f(x)$  und  $f'(x)$ . Auf welchen Intervallen ist  $f(x)$  nach oben bzw. nach unten konvex?

b) Formulieren Sie die Regel von de l'Hospital.

4.) a) Berechnen Sie  $\int_{x=1}^e \frac{1}{x} \sqrt{\ln x} dx$ .

b) (Kann unabhängig von a) gelöst werden) Berechnen Sie dieses Integral näherungsweise mit der Trapezregel für  $n = 2$ .

5.) Gegeben ist der im ersten Quadranten liegende Teil der Archimedischen Spirale mit der Polargleichung  $r = r(\varphi) = \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

a) Berechnen Sie den Inhalt des von der Kurve und der positiven  $y$ -Achse begrenzten Flächenstücks.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge des Kurvenstücks.