Prüfung aus Mathematik 1 für BI

am 28. April 2006

Deckblatt bitte nicht herunterreißen
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl / Mat.Nr.: ....

1.) a) Bestätigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jede natürliche Zahl n die Identität $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2^k} = 3 - \frac{n+3}{2^n}$ gilt, und bestimmen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$.

b) Die Funktion $s(n) = 3 - \frac{n+3}{2^n}$ ist offenbar streng monoton wachsend mit $n \in \boldsymbol{N}$, da die Glieder der angegebenen Reihe alle positiv sind. Zeigen Sie, dass $s(x) = 3 - \frac{x+3}{2^x}$ auch für die reelle Variable x auf dem ganzen Intervall $1 \leq x < \infty$ streng wachsend ist (Hinweis: es genügt nachzuprüfen, dass die Ableitungsfunktion $\frac{d}{dx}s(x)$ dort überall positiv ist).

2.) Gegeben sei die durch die drei Punkte $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gehende Ebene $\mathcal{E}$ und der Punkt P mit dem Ortsvektor $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Punkt der Ebene, der von P den kleinsten Abstand hat, und berechnen Sie diesen Abstand. Geben Sie ferner die durch P gehende und zu $\mathcal{E}$ parallele Ebene an. Welchen Winkel (im Bogenmaß) schließen die beiden Vektoren $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ ein?

3.) Berechnen Sie **a)** $\lim_{k\to\infty} (\ln(k^2) - \ln(k^2 - 2k + 2))$, **b)** $\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2}{e^{x-1} - 1}$, **c)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{x \sinh x}$.

Falls Sie irgendwo die Regel von de l'Hospital anwenden (was nicht überall erforderlich ist), begründen Sie, dass das berechtigt ist.

4.) a) Diskutieren Sie die Funktion $y = f(x) = \text{Arcsin}x$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. An welchen Punkten ist $f(x)$ stetig, an welchen differenzierbar, an welchen mehrfach differenzierbar? Existiert ein Wendepunkt? Bestätigen Sie, dass die Schmiegpararabel dritter Ordnung im Ursprung gegeben ist durch $y = p(x) = x + \frac{1}{6}x^3$, und skizzieren Sie beide Kurven auf $[-1, 1]$.

b) (Kann unabhängig von a) gelöst werden) Berechnen Sie $\int_{x=0}^{1/2} \text{Arcsin}x \, dx$.

5.) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$. Geben Sie eine Begründung für die Methode der Variation der Konstanten.