Prüfung aus Mathematik (2) für BI

am 24. 1. 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Das Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte 1, -1, -1 (nicht nachrechnen). Geben Sie drei unabhängige Fundamentallösungen an. Wie lautet die Differentialgleichung, zu welcher A die Begleitmatrix ist?

b) Wie lautet der <u>*Ansatz*</u> für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\,\mathrm{e}^{-t}$, wobei $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^3$ ein konstanter Spaltenvektor ist.

2.) Bestimmen Sie diejenige Kurve im ersten Quadranten, die der Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = \dfrac{1}{2\,(1-y)^2}$ genügt, durch den Punkt (0,1) geht und bei $y = 0$ waagrechte Tangente hat.

Hinweis zur Kontrolle: Die Lösung lässt sich explizit nur in der Form $x = x(y)$ darstellen und lautet $x = \dfrac{1}{2}\arccos(2y-1) - \sqrt{y(1-y)}$.

3.) Für die Bewegung eines Massenpunktes des $\mathbb{R}^3$ unter dem Einfluss eines konservativen Kraftfeldes $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad}(-U(\boldsymbol{x}))$ lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}(t)) = -\operatorname{grad} U(\boldsymbol{x}(t)).$$

Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie $E(t) = \dfrac{m}{2}(\dot{\boldsymbol{x}}(t))^2 + U(\boldsymbol{x}(t))$ zeitunabhängig ist, also konstant bleibt (Hinweis: Bestätigen Sie die Identität $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m}{2}(\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}) + U(\boldsymbol{x}(t))\right) = 0$).

4.) Gegeben sei das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \ln r \quad ((x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{o}\})$.

a) Berechnen Sie den Durchsatz pro Zeiteinheit durch irgendeine geschlossene Kurve C, die einmal den Ursprung umläuft. Wählen Sie C so, dass Sie sich mit der Rechnung möglichst wenig plagen müssen.

b) Ist $\tilde{C}$ eine geschlossene Kurve, die $\boldsymbol{o}$ nicht umläuft, dann ist der Durchsatz gleich 0. Bestätigen Sie dies am Beispiel des Polygonzuges $\tilde{C}:\ (0,1) \to (1,1) \to (1,0) \to (0,1)$.

5.) a) Bestätigen Sie, dass die durch die angegebene Reihe auf dem Quadrat Q: $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ dargestellte Funktion $u(x,y)$ im Inneren von Q harmonisch ist sowie den Randbedingungen $u(x,-1) = -x$, $u(x,1) = x$, $u(-1,y) = -y$ und $u(1,y) = y$ genügt:

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sinh((2k-1)\pi y)\sin((2k-1)\pi x) \ + \ \sinh((2k-1)\pi x)\sin((2k-1)\pi y)}{(2k-1)\sinh((2k-1)\pi)}$$

Hinweise: (i) Im Inneren von Q ist gliedweises Differenzieren erlaubt;
(ii) Aus Symmetriegründen genügt es, die RB $u(x,1) = x$ nachzuprüfen, und dies läuft auf die Bestimmung der Fourierreihe von $f(x) = x$ auf dem Intervall $-1 \le x \le 1$ hinaus.

b) Da die Funktion $v(x,y) = xy$ offenbar auch harmonisch ist und denselben Randbedingungen genügt, stimmt sie mit $u(x,y)$ auf Q überein. Welches Wärmeleitproblem wird hier beschrieben?