

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!

Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Das Differentialgleichungssystem  $y' = Ay$  mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  beschreibt einen

gekoppelten Federschwinger mit drei gleich starken Federn, gleich gedämpften und gleich großen Massen. Die Eigenwerte von  $A$  lauten  $\lambda = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\bar{\lambda} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\mu = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\bar{\mu} = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  (nicht nachrechnen). Bestimmen Sie das zu  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  gehörige Paar von komplexen Fundamentallösungen sowie das zugehörige Paar von reellen Fundamentallösungen.

b) Wie lautet der Ansatz für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems  $y' = Ay + r \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$ , wobei  $r \in \mathbb{R}^3$  ein konstanter Spaltenvektor ist.

c) Woran liegt es, dass nach hinreichend langer Zeit das System praktisch nur mehr entsprechend der Partikulärlösung schwingt?

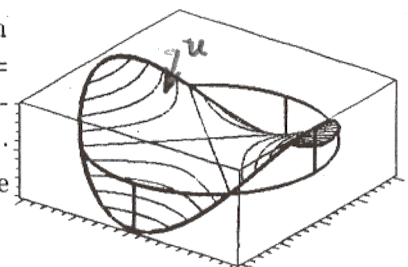
2.) a) Bestätigen Sie, dass alle Punkte der Fläche  $z = \frac{1}{x^2y}$  elliptisch sind.

b) Bestimmen Sie denjenigen Flächenpunkt im ersten Oktanten ( $x > 0, y > 0, z > 0$ ), der vom Ursprung  $(0, 0, 0)$  den kleinsten (euklidischen) Abstand hat. Hinweis zur Kontrolle:  $(\sqrt[3]{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ .

3.) a) Bestätigen Sie, dass das Vektorfeld  $u$  mit den drei Komponenten  $u = 0, v = 0, w = 1 - x^2 - y^2$  auf  $\mathbb{R}^3$  quellfrei ist. Welche Art von Strömung einer inkompressiblen Substanz wird damit beschrieben?

b) Berechnen Sie den Durchsatz pro Zeiteinheit durch den Kegelmantel  $M : z = r$  ( $= \sqrt{x^2 + y^2}$ ),  $0 \leq z \leq 1$ , also den Wert des Oberflächenintegrals  $J = \iint_M u \, dO$ . Hinweis zur Kontrolle:  $J = \frac{\pi}{2}$ .

4.) a)  $u(r, \varphi) = r^2 \cos(2\varphi)$  beschreibt die stationäre Temperaturverteilung in einer kreisförmigen Platte mit Radius 1 bei Randtemperatur  $u(1, \varphi) = f(\varphi) = \cos(2\varphi)$ . Bestätigen Sie durch Nachrechnen, dass  $u(r, \varphi)$  eine harmonische Funktion ist (Laplaceoperator in Polarkoordinaten heranziehen).

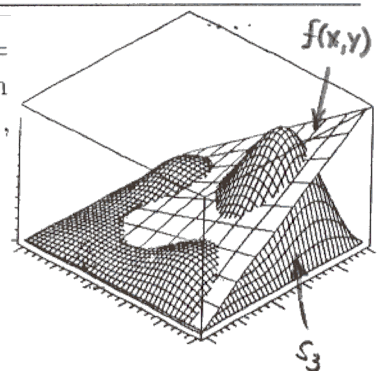


b) Rechnen Sie  $u$  auf kartesische Koordinaten um, bestimmen Sie also die Funktion  $U(x, y)$ , für die gilt  $U(x, y) = U(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = u(r, \varphi)$  (Hinweis zur Kontrolle:  $U = x^2 - y^2$ ).

c) Wie lautet die zu  $U(x, y)$  konjugiert harmonische Funktion  $V(x, y)$ ? Skizzieren Sie einige Stromlinien  $V = \text{const}$  und einige Äquipotentiallinien  $U = \text{const}$ .

d) (Zusatzpunkte) Begründen Sie, warum eine harmonische Funktion keine relativen Extrema besitzen kann (Hinweis: Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)

5.) a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten  $c_{kj}$  der Entwicklung  $f(x, y) = \sum_{k,j=1}^{\infty} c_{kj} \varphi_{kj}(x, y)$  der Funktion  $f(x, y) = xy$  nach dem vollständigen Orthogonalsystem  $\varphi_{kj} = \sin k\pi x \sin j\pi y$  auf dem Quadrat  $Q : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ . (Hinweis zur Kontrolle:  $c_{kj} = 4 \frac{(-1)^{k+j}}{kj \pi^2}$ ).



b) In welchem Sinne konvergiert die Folge der Partialsummen  $s_n = \sum_{k,j=1}^n c_{kj} \varphi_{kj}$  gegen  $f$ ? (In nebenstehender Abbildung ist  $n = 3$ ).