Prüfung aus Mathematik (2) ALT für BI

am 26. 6. 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Matrix A ist symmetrisch und daher diagonalisierbar; sie hat die Eigenwerte $1,\ 1, -1, -1$ (nicht nachrechnen).

b) Wie lautet der *Ansatz* für eine Partikulärlösung des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}\,\mathrm{e}^{-t} + \boldsymbol{s}\cos t$, wobei $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^3$ konstante Spaltenvektoren sind.

2.) a) Bestimmen Sie die Menge aller parabolischen Punkte (x, y, z) der Fläche $z = z(x, y) = \cos x \cos y$.
Hinweis zur Kontrolle: die Stellen (x, y) bilden eine Schar paarweise senkrechter Geraden (Skizze); bei der Berechnung von $D(x, y)$ empfiehlt sich die Heranziehung des Cosinus-Summensatzes.

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$ ein Sattelpunkt ist und dass bei $(0, 0, 1)$ ein relatives (und sogar absolutes) Maximum vorliegt.

3.) Es sei $\boldsymbol{U} = \binom{f}{g} = \operatorname{grad} u$ das Gradientenfeld mit der Potentialfunktion $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ $((x, y) \in G = \boldsymbol{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

a) Bestätigen Sie, dass $\boldsymbol{U}$ (als Geschwindigkeitsfeld aufgefasst) die Strömung einer inkompressiblen Substanz beschreibt. Wie hängt das mit der Tatsache zusammen, dass u der Realteil einer (auf $\mathbb{C}\backslash\{(0, 0)\}$) analytischen Funktion $w = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$ ist? Wie lautet diese Funktion und wie die zu u konjugierte harmonische Funktion v?

b) Berechnen Sie die Menge der Substanz, die pro Zeiteinheit durch einen Ursprungskreis C mit Radius R (von innen nach außen) tritt, also das Kurvenintegral $\int\limits_C f\, dy - g\, dx$. Was fällt auf?

4.) Bestimmen Sie die stationäre Temperaturverteilung $u(r, \varphi)$, die sich in einer an Ober- und Unterseite isolierten kreisförmigen Platte vom Radius 1 einstellt, wenn man die Randtemperatur

$$u(1, \varphi) = f(\varphi) = \begin{cases} \varphi & \ldots \quad \frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \ldots \quad -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

aufrechterhält. Schreiben Sie die ersten 4 Glieder der Lösungsreihe an.

5.) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsachse des starren Systems, das aus drei gleichen Massen besteht, die in den Punkten $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 0)$, $(x_3, y_3) = (0, 1)$ angebracht sind.

Anleitung: Die Hauptträgheitsachse ist die Gerade $x \cos\alpha + y \sin\alpha - c = 0$, bezüglich derer das Gesamtträgheitsmoment J der Massenpunkte minimal ist. Sie haben also diejenigen Werte α und c zu bestimmen, für welche die Funktion $J(\alpha, c) = \sum_{k=1}^{3}(x_k \cos\alpha + y_k \sin\alpha - c)^2$ minimal wird.

Skizzieren Sie die erhaltene Gerade.