Prüfung aus Mathematik für Bauingenieure

am 7. März 2014

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

Die mündlichen Prüfungen finden am Montag, den 17. März statt.

1. Gegeben seien
$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} xy \\ xy \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Erklären Sie den Begriff der *linearen Unabhängigkeit* von Vektoren.
   An welchen Stellen (x, y, z) sind $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ linear unabhängig?
   (b) Erklären Sie den Begriff des *Potentialfeldes* bzw. den einer *Potentialfunktion*.
   Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{w}$ kein Potentialfeld ist und bestimmen Sie eine Potentialfunktion für $\boldsymbol{v}$.
   (c) Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals über $\boldsymbol{v}$ vom Punkt $(1, 2, 3)$ nach $(3, 2, 1)$ bezüglich einer Kurve Ihrer Wahl.

2. (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems
$$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad y'(0) = y'(\pi) = 0.$$
   (b) Entwickeln Sie die auf $[0, \pi]$ definierte Funktion
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$
   in eine Fourierreihe bezüglich der Eigenfunktionen des Randwertproblems aus (a).

3. Gegeben sei das auf $\mathbb{R}^3 \backslash \{\boldsymbol{o}\}$ definierte Vektorfeld
$$\boldsymbol{V}_\alpha(x, y, z) = \frac{1}{(x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$
   wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.
   (a) Bestimmen Sie jene Werte von α für die $\operatorname{div} \boldsymbol{V}_\alpha = 0$ ist.
   (b) Bestimmen Sie jene Werte von α für die $\operatorname{rot} \boldsymbol{V}_\alpha = \boldsymbol{o}$ ist.
   (c) Es sei $\alpha = 0$ und S die Oberfläche der Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$. Verwenden Sie einen geeigneten *Integralsatz* zur Bestimmung des Oberflächenintegrals
$$\iint_S \boldsymbol{V}_0 \, d\boldsymbol{O}.$$

4. (a) Formulieren Sie das Gesetz der großen Zahlen.
   (b) Angenommen Sie haben ein Kapital von $X_0 = 1$ Euro und spielen das folgende Spiel: Sie werfen in jeder Runde eine faire Münze. Ihr Kapital halbiert sich, wenn Zahl fällt und bei Kopf gewinnen Sie vier Fünftel Ihres Kapitalstands hinzu.
   Zeigen Sie, dass bei oftmaliger Wiederholung dieses Spiels Ihr Kapitalstand mit großer Wahrscheinlichkeit gegen Null geht.