Prüfung aus Mathematik 1 für BI und UI

am 20. Jänner 2022

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Formulieren Sie (ausführlich) das *Leibniz'sche Kriterium* für Reihenkonvergenz.

   (b) Geben Sie eine Folge (a_n) von *nicht negativen* reellen Zahlen an, deren Folgenglieder eine Nullfolge bilden, sodass $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergiert.

   (c) Es sei (b_n) eine monoton fallende Nullfolge. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $k \geq 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{2k}(-1)^n b_n \leq b_0.$$

2. (a) Formulieren Sie (ausführlich) den *Fundamentalsatz der Algebra*.

   (b) Gegeben sei eine komplexe Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ eines Polynoms $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $p(\overline{z})$ und geben Sie auch an, welche Eigenschaften der komplexen Konjugation Sie dabei verwendet haben.

   (c) Das Polynom $q(x) = x^5 + c_4 x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x$ habe die komplexe Nullstelle $x_0 = i$ und den Teiler $x^2 + x - 6$. Bestimmen Sie die Koeffizienten $c_4, c_3, c_2, c_1 \in \mathbb{R}$.

3. Diskutieren Sie für die auf $[-1, 1]$ definierte Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{|x|} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   die folgenden Punkte:

   – Stetigkeit und Differenzierbarkeit

   – Monotonieverhalten und Extrema (inkl. Randextrema)

   Verwenden Sie die gesammelten Informationen, um eine Skizze von g anzufertigen.

4. (a) Bestimmen Sie mit Hilfe von partieller Integration eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \qquad x > 0.$$

   (b) Formulieren Sie (ausführlich) das *Integralkriterium von Cauchy* für Reihenkonvergenz.

   (c) Untersuchen Sie mit Hilfe von (a) und (b) die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

   auf Konvergenz bzw. Divergenz.