Prüfung aus Mathematik 2 für BI und UI

am 14. Oktober 2022

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Erklären Sie die Begriffe Eigenwert und Eigenvektor einer Matrix.

   (b) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$ genau die Eigenwerte der Matrix A sind.

   (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (d) Bestimmen und skizzieren Sie die Hauptachsenform der Kegelschnittslinie

   $$2x^2 + 6xy + 2y^2 = 1.$$

2. Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung des Differentialgleichungssystems

   $$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

3. (a) Bestimmen Sie die Lage und den Typ (Maximum oder Minimum) der Extrema der Funktion $f(x, y) = xy$ über $\mathbb{R}^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

   (b) Geben Sie die Richtungsableitungen der Funktion $f(x, y) = xy$ in den in (a) ermittelten Extrempunkten in eine Richtung Ihrer Wahl an.

   (c) Es sei $g(x, y, z) = xy + xz + yz$ und S bezeichne die Sphäre mit Radius 17 und Mittelpunkt im Ursprung. Berechnen Sie unter Verwendung eines geeigneten Integralsatzes

   $$\iint\limits_S \operatorname{grad} g \, d\boldsymbol{O}.$$

4. (a) Formulieren Sie das Gesetz der großen Zahlen.

   (b) Angenommen Sie haben ein Kapital von $X_0 = 1$ Euro und spielen das folgende Spiel: Sie werfen in jeder Runde eine faire Münze. Ihr Kapital halbiert sich, wenn Zahl fällt und bei Kopf gewinnen Sie vier Fünftel Ihres Kapitalstands hinzu.

   Zeigen Sie, dass bei oftmaliger Wiederholung dieses Spiels Ihr Kapitalstand mit großer Wahrscheinlichkeit gegen Null geht.