Prüfung aus Mathematik 1 f. MB

am 28. Jänner 2005

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Arbeitszeit: 150 Minuten!
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

1. (a) Überprüfen Sie die Folgen $(-1)^n \dfrac{n^2}{n!}$, $\dfrac{n^4}{(n^2-1)(n+1)^2}$ auf Konvergenz.

   (b) Überprüfen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n^2}{n!}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^4}{(n^2-1)(n+1)^2}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz. Geben Sie den Zusammenhang zwischen Konvergenz und absoluter Konvergenz von Reihen an!

2. (a) Berechnen Sie die n-te Ableitung der Funktion $(1-x)^{-1}$ folgendermaßen: Beweisen Sie mit vollständiger Induktion
$$\left((1-x)^{-1}\right)^{(n)} = n!(1-x)^{-n-1}.$$

   (b) Leiten Sie daraus die Taylorreihe für $(1-x)^{-1}$ an der Stelle $x=-1$ her.

   (c) Geben Sie den Konvergenzbereich der Reihe $\sum_0^\infty 2^{-n-1}(x+1)^n$ an und untersuchen Sie das Randverhalten.

3. (a) Geben Sie die Stammfunktionen zu $g(x) = \frac{3x}{x^2+x-2}$ und $h(x) = xe^x$ an, und berechnen Sie daraus $\int_2^3 g(x) + h(x)\, dx$.

   (b) Was ist eine Stammfunktion einer Funktion $f(x)$? Wie viele Stammfunktionen von $f(x)$ gibt es? Geben Sie eine Funktion an, die $\cos(x) + 17$ als Stammfunktion besitzt.

   (c) Berechnen Sie: $\int\limits_0^{x^2} \frac{d}{dt} e^{\sin^2 t}\, dt$, $\frac{d}{dx} \int\limits_0^{x^2} e^{\sin^2 t}\, dt$, $\frac{d}{dt} \int\limits_0^{x^2} e^{\sin^2 t}\, dt$.
   (Achtung: $e^{\sin^2 x}$ läßt sich **nicht** elementar integrieren!)

4. Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$: a) Nullstellen; b) Extremwerte; c) Polstellen; d) Monotonie; e) Berechnen Sie – falls erlaubt – mittels der Regel von de L'Hospital $\lim_{x\to\infty} f(x)$; f) Fertigen Sie eine Skizze an.

5. Gegeben sind folgende Vektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Sind dies Vektoren linear unabhängig?

   (b) Ändern Sie einen der Vektoren derart, daß die Vektoren linear unabhängig werden. (Beweis!)

   (c) Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem Rang einer Matrix und der linearen Unabhängigkeit ihrer Spaltenvektoren an.

   (d) Bestätigen Sie diesen Zusammenhang anhand der oben gegebenen Vektoren, bzw. der von Ihnen veränderten Vektoren.