

Zuname:

Vorname:

KennNr:

Matr.Nr:

MATHEMATIK 1 - GRUPPE A

11. März 2011

1) Berechnen Sie:

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^x$

[4 Punkte]

2) Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

Die Folge $a_n = n!$ ist	<input type="radio"/> monoton <input type="radio"/> beschränkt <input type="radio"/> bestimmt divergent <input type="radio"/> konvergent
Die Folge $a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$ ist	<input type="radio"/> monoton <input type="radio"/> beschränkt <input type="radio"/> bestimmt divergent <input type="radio"/> konvergent
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ist	<input type="radio"/> konvergent <input type="radio"/> absolut konvergent <input type="radio"/> bestimmt divergent <input type="radio"/> alternierend
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist	<input type="radio"/> konvergent <input type="radio"/> absolut konvergent <input type="radio"/> bestimmt divergent <input type="radio"/> alternierend
Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : z - i \leq 1\}$ ist	<input type="radio"/> beschränkt <input type="radio"/> offen <input type="radio"/> abgeschlossen <input type="radio"/> eine Kreisscheibe
Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : 1 < z - i < 2\}$ ist	<input type="radio"/> beschränkt <input type="radio"/> offen <input type="radio"/> abgeschlossen <input type="radio"/> eine Kreisscheibe
Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ ist	<input type="radio"/> stetig <input type="radio"/> differenzierbar <input type="radio"/> beschränkt <input type="radio"/> monoton
Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ ist	<input type="radio"/> stetig <input type="radio"/> differenzierbar <input type="radio"/> beschränkt <input type="radio"/> monoton

[8×1/2=4 Punkte]

3) Sei $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{(2n)^2}$.

(i) Bestimmen Sie den genauen Konvergenzbereich dieser Potenzreihe!

(ii) Berechnen Sie die Taylorreihe von f' und geben Sie deren genauen Konvergenzbereich an!

[2+2=4 Punkte]

Bitte umblättern!!!

4) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(x) = e^{x^2} y(x). \quad (1)$$

Sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$y(x) = e^{\int_0^x e^{t^2} dt}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass $y(x)$ eine Lösung von (1) ist.
(ii) Sei $z(x)$ auch eine Lösung von (1). Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{z(x)}{y(x)} \right)' = 0$$

auf \mathbb{R} gilt!

- (iii) Erklären Sie, wie man aus (ii) folgern kann, wie die allgemeine Lösung von (1) aussieht.

[1,5+1,5+1=4 Punkte]

- 5) (i) Geben Sie Vergleichskriterium von Weierstraß für uneigentliche Integrale an!
(ii) Die Gammafunktion ist für $x \geq 1$ definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Zeigen Sie, dass dieses Integral für $x \geq 1$ konvergiert.

[2+2=4 Punkte]

Viel Erfolg!

(Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)