

**Prüfung aus Mathematik 2 für MB**  
**am 2. Mai 2002**

Zuname: .....  
Vorname: .....  
Kennzahl: .....  
Mat.Nr.: .....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!  
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!  
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Entwickeln Sie die Funktion  $f(x, y) = x^2 + x^2y - 2x - y$  mit Hilfe der Taylorformel bis zu Termen 2. Ordnung mit Entwicklungspunkt  $(1, 0)$ .  
(b) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + x^2y - 2x - y$$

im Quadrat  $D: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$ . Untersuchen Sie insbesondere das Verhalten der Funktion am Rand des Quadrats.

2. (a) Gegeben ist das Vektorfeld  $\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie  $\iint_D \mathbf{v} \, d\mathbf{o}$ , wobei  $D$  die Oberfläche der Halbkugel  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  und  $y \geq 0$  ist.  
(b) Berechnen Sie das Integral aus (a) nochmals mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

3. (a) Zeigen Sie dass das Vektorfeld  $\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy + 1 \\ x^2 + 2yz \\ y^2 \end{pmatrix}$  ein Potentialfeld ist und berechnen Sie die zugehörige Potentialfunktion.

- (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral  $\int_C \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$  über die Kurve

$$C : \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -1 \\ \cos t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi].$$

4. (a) Löse:  $yy' = x, y(0) = -1$   
(b) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(x \cos y + \sin x)y' + y \cos x + \sin y = 0?$$

- (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

5. (a) Lösen Sie das Variationsproblem  $\int_0^1 (y + 2y')^2 dx \rightarrow \min$  unter den Randbedingungen  $y(0) = 1, y(1) = \sqrt{e}$ .  
(b) Berechnen Sie die komplexen Kurvenintegrale

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz, \quad \oint_{|z|=1} e^{3z} dz.$$