Prüfung aus Mathematik 2 für MB (SS+WS)

am 7. März 2002

Zuname:......................

Vorname:......................

Kennzahl:......................

Mat.Nr.:......................

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Berechnen Sie das Volumen der Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ mit $z \geq 0$.

   (b) Vertauschen Sie bei $\int\limits_0^9 \int\limits_{\sqrt{y}}^3 f(x, y)\, dx\, dy$ die Integrationsreihenfolge.

   Geben Sie eine Eigenschaft der Funktion f an, die gewährleistet, dass sich durch das Vertauschen der Wert des Integrals nicht ändert.

2. (a) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass das Vektorfeld $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2xy - 1 \\ ax^2 + 3y^2 \end{pmatrix}$ konservativ ist. Berechnen Sie in diesem Fall auch die zugehörige Potentialfunktion.

   (b) Berechen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_C \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}$ für $a = 1$, wobei die Kurve C den im mathematisch positiven Sinn durchlaufenen Ellipsenbogen $x^2 + 2y^2 = 1$ mit $y \geq 0$ bezeichnet.

3. (a) Ist das Anfangswertproblem

   $$xy' - 2x^3y^2 + y = 0 \qquad y(0) = y_0$$

   für alle Werte y_0 eindeutig lösbar?

   (b) Löse das Anfangswertproblem

   $$xy' - 2x^3y^2 + y = 0 \qquad y(1) = 1$$

   mit Hilfe der Substitution $u = xy$.

   (c) Löse die Differentialgleichung

   $$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = x.$$

   Sind diese Lösungen stabil?

4. Lösen Sie das Wärmeleitungsproblem $u_t = u_{xx}$, mit den Randbedingungen $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$ und der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \sin(\pi x) \cos(\pi x)$.

5. (a) Sind die Funktionen $g_1(z) = z|z|^2$ und $g_2(z) = z^2$ in $\mathbb{C}$ analytisch?

   (b) Bestimmen Sie die Ordnung aller Pole der Funktion $h(z) = \dfrac{\sin z}{(z-1)z^2}$.

   (c) Berechnen Sie die Integrale $\int\limits_C z^2\, dz$ und $\int\limits_C \dfrac{e^{2z}}{z(z-2)}\, dz$ über den Kreis $C : |z| = 1$.