

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!

Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Sei  $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$ .

(a) Bestimmen Sie alle Extremwerte auf dem Kreis  $x^2 + y^2 = 1$ .

(b) Bestimmen Sie alle Extremwerte für  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

(c) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Grades im Minimum an.

(d) Bestimmen Sie Gradient und Normalvektor im Punkt  $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

2. Berechnen Sie die Fourierreihe für die  $\pi$ -periodische Funktion  $|\cos x|$ . Berechnen Sie weiters  $\int_0^\pi |\cos x|^2 dx$ . Was besagt die Parseval'sche Gleichung? Geben Sie den Wert der hierbei auftretenden Reihe an. Leiten Sie weiters die Fourierreihe für die  $\pi$ -periodische Funktion  $\sin x$ ,  $x \in [-\pi/2, \pi/2]$  her.

3.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} xy \\ e^z \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -e^z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie  $\int_C \mathbf{v} d\mathbf{x}$ , wobei  $C$  der Rand des Vierecks mit den Eckpunkten  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, -1)$ ,  $(1, 1, -2)$ ,  $(0, 1, -1)$  ist.

(b) Berechnen Sie  $\int_F \mathbf{r} d\mathbf{O}$ , wobei  $F$  das Ebenenstück  $x + y + z = 0$  mit  $0 \leq x, y \leq 1$  bezeichnet.

(c) "Zufälligerweise" sind die Ergebnisse in beiden Fällen ident. Wie erklären Sie sich das?

4. Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Lösen Sie das Sturm-Liouville'sche Eigenwertproblem  $T_{tt} + (1 + \lambda^2)T = 0$ ,  $T(0) = T(1) = 0$ . Benutzen Sie dies, um die Lösung der Differentialgleichung  $u + u_{tt} - u_x = 0$  mit den Randbedingungen  $u(x, 0) = u(x, 1) = 0$ ,  $u(0, t) = u(1, t) = \sin(3\pi t)$  anzugeben.