Prüfung aus Mathematik 2 für MB

am 19. März 2004

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Berechne $\iint\limits_B (x^2+y^2)dxdy$, wobei B das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,2)$ und $(2,0)$ ist.

   (b) Gesucht sind die wärmsten und die kältesten Punkte auf der Sphäre $x^2+y^2+z^2=1$ bei einer Temperaturverteilung $T=xy+xz$.

2. (a) Es sei $g(x,y)=y^2(x^2+y^2-2x+1)$.

      i. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion g.

      ii. Entwickeln Sie die Funktion g nach Potenzen von $x-1$ und y. (Taylorformel!)

      iii. Besitzt die Funktion g an der Stelle $(x_0,y_0)=(1,0)$ einen lokalen Extremwert? Wenn ja, handelt es sich um ein Maximum oder ein Minimum?
      Hinweis: Beachte (ii)!

   (b) Die Funktion $F:\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}\to\mathbb{R}$ sei durch

   $$F(x,y):=f\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$

   definiert, wobei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion ist. Zeige, dass die Funktion F die Differentialgleichung $xF_x+yF_y=0$ erfüllt.

3. (a) Ist die Differentialgleichung

   $$e^x(x+y)y'+e^x(x+y)-1=0$$

   exakt?

   (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus (a) mit Hilfe eines integrierenden Faktors.

   (c) Geben Sie insbesondere jene Lösung $y(x)$ aus (b) an, die die Anfangsbedingung $y(0)=-1$ erfüllt.

4. (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

   $$\dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

   (b) Sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems aus (a) stabil?
   Geben Sie eine Lösung $\mathbf{x}(t)$ an, für die gilt $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}$.
   Gibt es auch Lösungen $\mathbf{x}(\mathbf{t})$, für die $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}$ nicht gilt? Wenn ja, geben Sie auch so eine Lösung an!

5. Bestätigen Sie den Integralsatz von Stokes für das Vektorfeld $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}yz\\xz\\xy\end{pmatrix}$ und für die oberhalb der xy–Ebene gelegenen Halbkugel D: $x^2+y^2+z^2=4$.