Prüfung aus Mathematik 2 für MB und VT (neu)
am 24. Oktober 2003

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl: ....
Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ im Punkt $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ in Richtung $\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.
   (b) Bestimme die Extrema der Funktion $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ unter der Nebenbedingung $x + y = 1$. Handelt es sich um Maxima oder Minima?
   (c) Besitzt die Funktion $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ an der Stelle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Extremum?

2. (a) Für welchen Wert des Parameters $a \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}2xy - z\\ ax^2 + 1\\ -x\end{pmatrix}$ konservativ? Berechnen Sie die zugehörige Potentialfunktion.
   Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}$, wobei γ die geradlinige Verbindung der Punkte $P_1(0,0,0)$ und $P_2(2,2,2)$ ist.
   (b) Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
   Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $x = ar\cos\varphi\sin\theta$, $y = br\sin\varphi\sin\theta$ und $z = cr\cos\theta$.
   (c) Es bezeichne $\boldsymbol{r}$ den vom Ursprung ausgehenden Radiusvektor in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Gradienten der skalaren Funktion $|\boldsymbol{r}|^3$.

3. (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y'' + y' - 2y = 0.$$
   Bilden die Funktionen $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = 2e^{-2x}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen? Bilden die Funktionen $y_3(x) = e^x - e^{-2x}$, $y_4(x) = e^{-2x} - e^x$ ein Fundamentalsystem von Lösungen? Begründung!
   (b) Wie lautet der Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung
$$y'' + y' - 2y = \cos x - x^2 e^x?$$
   Anmerkung: Die Koeffizienten sind nicht auszurechnen!
   (c) Bestimmen Sie jene Lösung der Differentialgleichung
$$x^2(x+1)y' + x^2 y - 1 = 0,$$
   die die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ erfüllt.
   Hinweis: Es gibt einen integrierenden Faktor, der nur von x abhängt.

4. Lösen Sie die Schwingungsgleichung $z_{tt} = z_{xx}$ mit den Randbedingungen $z(0,t) = z(2,t) = 0$ und den Anfangsbedingungen $z(x,0) = 1 - |1 - x|$, $z_t(x,0) = 0$.