

**Prüfung aus Mathematik 2 für MB & VT
am 29. 4. 2005**

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname:
Vorname:
Kennzahl / Mat.Nr.:

1.) a) Entwickeln Sie $z = f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ mit Hilfe der Taylorformel nach Potenzen von $x - 1$ und $y + 2$ (Entwicklungspunkt also $(x_0, y_0) = (1, -2)$).

b) Wie lautet die Tangentialebene im Punkt $(1, -2, z)$?

c) Wie ist der Parameter b zu wählen, damit die Fläche $z = x^2 + 2bxy + y^2$ ausschließlich aus parabolischen Punkten besteht? Um welche Art von Fläche handelt es sich in diesem Fall?

2.) a) Lösen Sie mittels Laplacetransformation die Differentialgleichung $y'' + y = 1 + \sin t$ (ungedämpfte Schwingung mit Erregung) unter der Anfangsbedingung $y(0) = y'(0) = 0$. Ist die Lösung beschränkt?

b) Welche Sätze über die Laplacetransformation werden für die Aufgabe a) benötigt?

3.) Die Dichte $\rho(z)$ der Luft ist eine Funktion der Höhe z über dem Meeresspiegel. Bis ca. 10 000 m gilt näherungsweise $\rho(z) = e^{-\frac{z}{8000}}$ (ρ in kg/m^3 , z in m gemessen). Berechnen Sie die Masse M der Luft, die in einem Kreiszylinder Z mit Radius 1 m und Höhe 10 000 m enthalten ist, also das Integral

$$M = \iiint_Z \rho(z) \, dx \, dy \, dz \quad (Z : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 10\,000).$$

4.) Lösen Sie die Schwingungsgleichung $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$ für eine quadratische Membran mit Seitenlänge 1, die an allen vier Seiten eingespannt ist. Die Randbedingungen lauten also $u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0$. Wie ist die Anpassung an die AB $u(x, y, 0) = f(x, y)$, $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$ im Prinzip möglich?

Hinweis: doppelte Separation $u(x, y, t) = T(t)X(x)Y(y)$ führt auf die beiden Sturm-Liouvilleschen Probleme $-X'' = \kappa^2 X$, $X(0) = X(1) = 0$; $-Y'' = (\mu^2 - \kappa^2)Y$, $Y(0) = Y(1) = 0$.

5.) a) Bestätigen Sie den Satz von Stokes anhand des Feldes $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ und der oberhalb der x - y -Ebene gelegenen Einheitshalbsphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, mit dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ als ihrem Rand.

b) Wie lässt sich der Satz von Stokes physikalisch deuten?