Prüfung aus Mathematik 2 für MB und VT

am 1. März

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Es sei $f(x, y) = x^2 e^{-y} - 1$.
   (a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f (inlusive Skizze für $-3 \leq x \leq 3$).
   (b) Bestimmen Sie Art und Lage der Nullstellen von (f_x, f_y).
   (c) Bestimmen Sie (alle 4) Extremwerte von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 3$.
   (d) Entwickeln Sie f in eine Taylorreihe bis zum dritten Grad um den Punkt $(1, 2)$. Geben Sie daraus die Tangentialebene und den Normalvektor im Punkt $(1, 2)$ an.

2. (a) Was ist ein Gradientenfeld, bzw. eine Potentialfunktion? Geben Sie Rotation und Divergenz eines Vektorfelds an.
   (b) Beweisen Sie, daß $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 2yz \\ y^2 + 1 \end{pmatrix}$ einen Gradientenfeld ist und berechnen Sie die Potentialfunktion. Was für einen Wert hat daher das Kurvenintegral von dem Punkt $(1, 1, 1)$ zu (π, π, π), inwieweit hängt dieser Wert von der Form der Kurve ab?
   (c) Geben Sie den Satz von Stokes an. Was liefert daher das Oberflächenintegral von rot$\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v}$ aus (b)) über ein beliebiges Flächenstück? Berechnen Sie rot$\boldsymbol{v}$. Erläutern Sie die Zusammenhänge.

3. Gegeben ist die autonome Differentialgleichung $y'' = 2y'^2 y$ unter der Anfangsbedingung $y(0) = 0, y'(0) = -2$. Zeigen Sie: das Lösen der autonomen Differentialgleichung führt auf die Differentialgleichung $y' = ce^{y^2}$. Lösen sie diese Differentialgleichung mit Potenzreihenansatz: Geben Sie nur die ersten 4 Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 an.

4. (a) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ mit der EW-EV-Methode (zur Kontrolle $\lambda = 1, 2, 3$):
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (b) Geben Sie allgemein die Lösungen eines Differentialgleichungssystem $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}$ an. Wieviele Lösungen gibt es? Was passiert im Fall komplexer Eigenwerte?

5. Lösen Sie die Differentialgleichung $u_{tt} = 4u_{xx} + 2$, $u(x, 0) = 1 - x^2$, $u_t(x, 0) = 0$, $x \in [-1, 1]$, mittels der Darstellung von D'Alembert. (Substitution: $X = x + 2t, T = x - 2t$).