Prüfung aus Mathematik 2 für MB&VT
am 30. 1. 2004

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl: ....
Mat.Nr.: ....

1.) a) Welche Punkte der Fläche $z = z(x, v) = \dfrac{v^2}{2} + 1 - \cos x$ sind elliptisch, welche hyperbolisch, welche parabolisch? Skizzieren Sie die betreffenden Bereiche in der $\{x, v\}-$Ebene und die drei Niveaulinien $z = \frac{1}{2}$, $z = \frac{4}{2}$, $z = \frac{9}{2}$ (Es handelt sich um die Energiefläche eines mathematischen Pendels; die Niveaulinien $z =$ const $(= \frac{v_0^2}{2})$ sind gerade die Phasenbahnen $v^2 = v_0^2 - 2 + 2\cos x$).
b) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(x_0, v_0) = (\frac{\pi}{4}, 1)$ an.
c) Gibt es Punkte mit waagrechter Tangentialebene?

2.) Lösen Sie die Differentialgleichung der Kettenlinie $y'' = k\sqrt{1 + y'^2}$ ($k > 0$, fest), passen Sie die Lösung an die Bedingungen $y(0) = y'(0) = 0$ an, und bestimmen Sie die Schmiegparabel zweiter Ordnung zur Entwicklungsstelle 0. Skizzieren Sie die Lösungskurve.

3.) Bestimmen Sie mit Separationsansatz die allgemeine Lösung $T(x, t)$ der Wärmeleitungsgleichung $T' = c^2 T_{xx}$ unter den Randbedingungen $T(0, t) = T(1, t) = 0$ ($t \geq 0$) und passen Sie die Lösungsreihe an die Anfangsbedingung $T(x, t) = 1 =$ const $(0 < x < 1)$ an.

4.) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$.

5.) Der Satz von Green ist am Beispiel $\displaystyle\int_C -y\,dx + x\,dy$ nachzuprüfen, worin C den Rand des von $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$ begrenzten Gebietes bezeichnet.