Prüfung aus Mathematik 2 für MB und VT (neu)

am 9. Mai 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

---

1. (a) Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin(\pi x^3)\,dx\,dy$$

   (b) Berechnen Sie das Volumen der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
   (*Hinweis:* Verwenden Sie die Substitution $x = r\sin\vartheta\cos\phi,\ y = r\sin\vartheta\sin\phi,\ z = r\cos\vartheta$.)

---

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = x(y+1)$ mit $y(0) = 1$, durch Potenzreihenansatz $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

   Nach Einsetzen in die Differentialgleichung liefert Koeffizientenvergleich eine Rekursion für die c_i, aus der sich die Koeffizienten hier *explizit* bestimmen lassen (Anfangsbedingung verwenden!).

   Vergleichen Sie Ihr Resultat mit der durch Variablentrennung bestimmten Lösung.

---

3. Setzen Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 < x \le \pi \\ 0 & \text{für} \quad \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

   2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fort und entwickeln Sie sie dann in eine Fourierreihe. Sind die Voraussetzungen des Satzes von Dirichlet erfüllt?

---

4. Lösen Sie das folgende inhomogene Differentialgleichungssystem:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} -e^{-8x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}$$

---

5. Bestimmen Sie den Schwingungszustand $z(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ einer unendlich langen Saite, die anfangs die Form $z(x,0) = f(x) = e^{-x^2}$ und die Geschwindigkeit $z_t(x,0) = g(x) = 2cxe^{-x^2}$ hat.

   Hinweis: Formel von d'Alembert.
