Prüfung aus Mathematik 2 für MB + VT

am 25. Juni 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Gegeben sei das Anfangswertproblem $y'' + 5y' + 6y = e^{-2t} + 10\sin(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

   (a) Bestimmen Sie die Lösung mittels Laplacetransformation.
   Hinweis: Verwenden Sie ohne Rechnung:

   $$\frac{1}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}, \text{ und}$$

   $$\frac{10}{(s^2+1)(s+2)(s+3)} = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+3} - \frac{s-1}{s^2+1}.$$

   (b) Bestimmen Sie die Lösung mittels Ansatzmethode.
   Hinweis: Beachten Sie: Ist y_1 eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'' + ay' + by = f_1$ und y_2 eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'' + ay' + by = f_2$, dann ist $y_1 + y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + ay' + by = f_1 + f_2$.

2. (a) Mit Hilfe der Lagrangeschen Regel bestimme man den nächsten Punkt der Ebene $4x + 6y - 2z = 28$ zum Ursprung.

   (b) Mit Hilfe von a) bestimmen man den nächsten Punkt der Ebene $4x + 6y - 2z = 14$ ohne neue Rechnung aber mit Begründung (Skizze!). Wie lautet die Lösung zu $4x + 6y - 2z = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig?

3. Vom Vektorfeld $v = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$ ist das Oberflächenintegral

   $$\iint_D \mathbf{v} d\mathbf{o}$$

   über den von $z = 0$ bis $z = 4$ reichenden Kegel $x^2 + y^2 = z^2$ (Skizze!) zu berechnen.

4. Lösen Sie das folgende Differentialgleichungssystem mit der Eigenwert-Eigenvektormethode:

   $$y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} y(x)$$

5. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = x(y+1), y(0) = 1$ durch Potenzreihenansatz $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Durch Koeffizientenvergleich erhält man hier eine Rekursionsformel, die es erlaubt y hier vollständig zu bestimmen. Geben Sie y am Ende auch wieder in geschlossener Form an.