

Prüfung aus Mathematik 1 für MB und BI
am 2. Mai 2002

Zuname:
Vorname:
Kennzahl:
Mat.Nr.:

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n = 0, 1, \dots$ und $x \neq 1$ gilt:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = s(x).$$

- b) Leiten Sie daraus eine Summenformel für $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ her!
c) Wo konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$?
-

2. Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n(x) = nx(1 - x)^n \quad x \in [0, 1].$$

- a) Zeigen Sie, dass $f_n(x) \rightarrow 0$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt und *skizzieren* Sie $f_1(x), f_3(x)$!
b) Berechnen Sie die Extremstellen x_n von $f_n(x)$ (also $f'_n(x_n) = 0$) und den Funktionswert $f_n(x_n)$ an diesen Stellen!
c) Ist $f_n(x)$ auf $[0, 1]$ gleichmässig konvergent?
-

3. a) Berechnen Sie die Integrale

$$\int x e^{-x} dx \quad \int \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx.$$

- b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren (indem Sie mit geeigneten konvergenten/divergenten Integralen nach oben/unten abschätzen):

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{5 + \sqrt{x}} dx \quad \int_2^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 - 2}} dx$$

4. a) Bringen Sie die folgende Matrix A auf Diagonalgestalt. Wählen Sie dabei die Transformationsmatrix S so, dass

$$D = S^T \cdot A \cdot S$$

- gilt. (*Hinweis: Einer der Eigenwerte λ_i lautet $\lambda_1 = -6$*)
b) Was wissen Sie über Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von reellen, symmetrischen Matrizen?
c) Bestimmen Sie (ohne zusätzlichen Rechenaufwand) $\det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = -\frac{2y}{x} + \frac{1}{x^2}$.
-