

**Prüfung aus Mathematik 1 für MB und BI**  
**am 6. März 2003**

Zuname: .....  
Vorname: .....  
Kennzahl: .....  
Mat.Nr.: .....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!  
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!  
Arbeitszeit: 150 Minuten!

---

1. a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i,$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$  positive, reelle Zahlen sind.

- b) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2} + 5} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{3^n - 2}$$

---

2. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

- a) Zeigen Sie, dass  $f(x)$  an der Stelle  $x = 0$  stetig ist.  
b) Wie man zeigen kann (was von Ihnen hier aber nicht verlangt wird), ist  $f(x)$  um  $x = 0$  sogar in eine Potenzreihe entwickelbar:  $f(x) = 1 + B_0x + \frac{B_1x^2}{2!} + \dots$ . Berechnen Sie  $B_0, B_1$ .  
c) Ist die Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x = 0$  differenzierbar?
- 

3. a) Berechnen Sie

$$\int x^2 \sqrt{1 - 2x} \, dx.$$

- b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{3 + 5e^x}} \, dx \quad \int_1^{\infty} x e^{-x} \, dx$$

---

4. a) Berechnen Sie das *Volumen* folgendes Rotationskörpers:  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ; Rotationsachse:  $x$ -Achse.  
b) Sind die Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig bzw. bilden sie eine Basis des  $\mathbf{R}^3$ ?

---

5. a) Lösen sie das Gleichungssystem  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

- b) Beschreiben Sie die verschiedenen Fälle, die beim Lösen eines linearen Gleichungssystems auftreten können! Welcher Fall tritt in a) ein?