Prüfung aus Mathematik 1 für MB und BI

am 6. Dezember 2002

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

---

1. a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \dots\ x \neq 0 \\ 0 & \dots\ x = 0 \end{cases}$ ist differenzierbar, ihre Ableitung ist aber an der Stelle 0 nicht stetig.

   b) Sei $g(x) = \sin x$ und $f(x)$ wie eben definiert. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Warum lässt sich die Regel von de l'Hospital hier nicht anwenden?

---

2. a) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ habe den Konvergenzradius $r \neq 0$. Welche Konvergenzradien haben die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ bzw. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ (die durch gliedweise Differentiation bzw. Integration aus der ersten Reihe hervorgehen)? (Setzen Sie voraus, dass $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ existiert.)

   b) Leiten Sie aus der Potenzreihe für $\dfrac{1}{1-x}$ durch Differenzieren die Potenzreihen für $\dfrac{1}{(1-x)^2}, \dots, \dfrac{1}{(1-x)^k}$, jeweils mit Entwicklungspunkt $a = 0$, her.

---

3. Geben Sie das Cauchysche Integralkriterium für unendliche Reihen an und untersuchen Sie mit dessen Hilfe die Konvergenz folgender Reihen:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\ln(n)]^2}.$$

---

4. Invertieren Sie die Matrix B und lösen Sie das Gleichungssystem $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -28 \\ 14 \end{pmatrix}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

5. a) Verwenden Sie die Leibnizsche Sektorformel, um den Flächeninhalt der Ellipse

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

   zu berechnen!

   b) Berechnen Sie die Länge des Zykloidenbogens $x(t) = r(t - \sin(t)), y(t) = r(1 - \cos(t))$ für $t \in [0, 2\pi]$ (bei konstantem r).
