Prüfung aus Mathematik 1 für MB und BI

am 9. Mai 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

---

1. a) Leiten Sie Taylorreihen mit Entwicklungspunkt 0 der folgenden Funktionen aus bekannten Reihen her:

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} + 1 \qquad g(x) = x \int_0^x \sin(t^2)\, dt$$

b) Setzen Sie die Funktion $\frac{\cos(x)-1}{x} + 1$ stetig für $x = 0$ fort. Ist die fortgesetzte Funktion differenzierbar in 0?

---

2. a) Lösen Sie das lineare inhomogene Anfangswertproblem

$$y'(x) = -\frac{1}{2x} y(x) - \frac{1}{2x^2}, \quad y(4) = 0$$

mittels Variation der Konstanten.

b)Es seien y_1, y_2 zwei partikuläre Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = f(x)y(x) + g(x)$. Bestimmen Sie eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

---

3. Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren:

$$\int_0^\infty e^{-x} \sqrt{|\sin(x)|}\, dx \qquad \int_1^\infty \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\, dx$$

Achtung: In beiden Fällen sollten Sie NICHT versuchen, die Antwort direkt mittels Bestimmung der Stammfunktion zu finden.

---

4. a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r\sin(t) & -r\cos(t) & 0 \\ \cos(t) & sin(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Es seien A, B und C drei (n, n)–Matrizen mit $\det(A) = 1$ und $\det(B) = 3$ und alle Zeilen von C seien Kopien der ersten Zeile von A.

Bestimmen Sie $\det(C)$, $\det(AB^T)$ und $\det(A + C)$.

---

5. a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über $n \geq 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)\dots(j+n-1)x^j$$

Beachten Sie beim Induktionsschritt, dass Sie Potenzreihen gliedweise differenzieren dürfen.

b) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der Reihe $\frac{1}{2} \sum\limits_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)x^j$.