Prüfung aus Mathematik 1 für MB und BI

am 12. Dezember 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{12}{(i+3)(i+4)} = \frac{3n}{n+4}.$$

Konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{12}{(i+3)(i+4)}$?

2. Leiten Sie die Taylorreihen mit Entwicklungspunkt 0 der folgenden Funktionen aus bekannten Reihen her:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad y(x) = x \int_0^x \sin(2t^2)dt$$

3. Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren:

$$\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{|\cos x|}\, dx, \quad \int_0^\infty x \sin x\, dx$$

4. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-\cos x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

a) Wo ist $f(x)$ definiert? Wo ist $f(x)$ stetig? Wo ist $f(x)$ differenzierbar?

b) Wie man zeigen kann, ist $f(x)$ um $x = 0$ in eine Potenzreihe entwickelbar: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ Berechnen Sie a_0, a_1, a_2!

5. Gegeben sei die vom Parameter $x \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & 0 & x \\ 2+x & x & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $A(x)$ invertierbar?

b) Sei $x = 0$. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = A(0)$.