Prüfung aus Mathematik 1 für MB und BI

am 14. Dezember 2001

Zuname:........................

Vorname:........................

Kennzahl:........................

Mat.Nr.:........................

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 36 \\ 36 & -23 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A!

b) Was versteht man unter "Eigenwert" und "Eigenvektor" einer Matrix M? Warum liefert das Lösen der Gleichung $\det(M - \lambda I) = 0$ genau die Eigenwerte?

c) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} -2 & 36 \\ 36 & -23 \end{pmatrix}^n$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$!

2. $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

a) Zeigen Sie: Diese Funktion ist stetig und differenzierbar. Die Ableitung $f'(x)$ ist ebenfalls stetig und differenzierbar.

b) Geben Sie eine Funktion $g(x)$ an, die bei $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist. Geben Sie eine Funktion $h(x)$ an, die bei $x_0 = 0$ differenzierbar ist, aber deren Ableitung bei $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

c) Geben Sie die Definition von "stetig" und "differenzierbar" an.

3. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

a) Wo konvergiert diese Reihe?

b) Zeigen Sie, dass im Konvergenzbereich

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

gilt!

c) Geben Sie den Satz über das Differenzieren von Potenzreihen an!

4. a) Geben Sie das Cauchysche Integralkriterium über die Konvergenz von Reihen an!

b) Untersuchen Sie auf Konvergenz:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \ln n, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$