Prüfung aus Mathematik 1 für MB und BI

am 18. Oktober 2002

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

---

1. a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

   b) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos n\pi$$

---

2. a) Untersuchen Sie $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Können Sie die Funktion stetig bzw. stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen?

   b) Zeigen Sie, dass die Funktion $x + \ln(x)$ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ eine Nullstelle besitzt und berechnen Sie diese näherungsweise mit dem Newton-Verfahren. Benutzen Sie hierbei den Startwert $x_0 = 0.75$.

---

3. a) Integrieren Sie mit Hilfe der Substitutionsregel:

$$\int \frac{\cos(x) + \sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)}\, dx$$

   b) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz:

$$\int_1^{\infty} \sqrt{\frac{|\sin(x)|\, e^{-x}}{x^3}}\, dx$$

---

4. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

   b) Erklären Sie die Begriffe "Eigenwert" und "Eigenvektor" und wieso erhält man die Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms?

---

5. a) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{1}{2}y'' - 2y' + 2y = 0$$

   b) Zeigen Sie, dass die Lösungen dieser Differentialgleichung einen Vektorraum bilden! Geben Sie eine Basis für diesen an!
