Prüfung aus Mathematik 1 für MB und BI

am 24. Januar 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

---

1. a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}x^k = \frac{x^{n+1}+(-1)^n}{x+1} \qquad (x \neq -1)$$

   b) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n-k}x^k$$

---

2. a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen ($n \in \mathbb{N}$):

$$a_n = \ln(n+1) - \ln(n) \qquad b_n = \frac{(n!)^2}{(n^2)!}$$

   b) Leiten Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen aus bekannten Reihen her:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad g(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

---

3. a) Untersuchen Sie $f(x) = \frac{\sin(x)^2}{x}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   b) Können Sie die Funktion stetig bzw. stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen?

---

4. Bestimmen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)^2+\sin(t)+4}{\sin(t)^3+3\sin(t)^2+\sin(t)+3}\cos(t)dt$$

---

5. a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt p der Ebene E mit Normalenvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ durch den Punkt $e = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$, und der Geraden g definiert durch $x = \begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.
   b) Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome höchstens dritten Grades einen Vektorraum darstellt. Welche Dimension hat der Vektorraum? Geben Sie zwei verschiedene Basen an.