Prüfung aus Mathematik 1 für MB und BI

am 24. Oktober 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz (Saubere Begründungen).

2. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}$, wobei r, α feste reelle Zahlen sind ($0 < r < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Begründen Sie, warum man hier die Summenformel für die unendliche geometrische Reihe anwenden kann. Gewinnen Sie aus Ihrem Ergebnis durch Anwendung der Eulerformel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta$ eine Summenformel für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\alpha$.

3. a) Geben Sie die Regel von de l'Hospital an und benützen Sie diese zur Berechnung der folgenden Limiten: $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to 0_+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}$.

4. a) Es sei n ein fester Vektor im $\mathbb{R}^4$. Begründen Sie, warum die Menge V der Punkte $x \in \mathbb{R}^4$ mit $xn = 0$ einen Vektorraum bildet. Welche Dimension hat dieser? Es sei nun speziell $n = (1, 1, 2, -1)^{tr}$. Geben Sie eine Basis von V an.

b) Wann nennt man n Vektoren linear unabhängig? Wann bilden n Vektoren die Basis eines Vektorraums?

5. a) Die folgende Kegelschnittslinie ist durch eine Drehung und anschließende Translation auf Hauptachsenform zu bringen: $2x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 1$. Skizzieren Sie das transformierte Objekt.

b) Was versteht man unter den Eigenwerten einer Matrix? Was lässt sich über die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sagen und was hat diese Frage mit dem Problem aus a) zu tun?