Prüfung Mathematik 1

25.01.2002

Zuname: **Vorname:**
Mat.Nr.:

Aufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte). Man untersuche auf Konvergenz und bestimme, falls vorhanden, die Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)^3}{n^2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sinh(n)}{n^2}, \quad \lim_{x\to 0} x^{\cos(x)-1}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte).

a) Was besagt das Leibnizsche Kriterium für alternierende Reihen?

b) Man zeige, daß $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x\,\tanh(x)$ monoton steigend ist.

c) Man untersuche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\,\tanh(n)}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Man bestimme durch Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten die ersten 5 Glieder der Potenzreihe von $\frac{1}{\cos(x)}$ mit Entwicklungspunkt 0.

Aufgabe 4 (6 Punkte). Es sei f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

a) Man zeige, daß f stetig ist.

b) Man bestimme die Extrema von f.

c) Man bestimme $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Man löse die Differentialgleichung

$$y' = x^2\,(3\,y + 1)\,, \quad y(0) = 0.$$

Aufgabe 6 (3 Punkte). Man zeige mit vollständiger Induktion, daß für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2\,n} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte). Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, so daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 2\,x & 1 \\ -2 & x-2 & -2 \\ x-1 & 4\,x-4 & x-4 \end{pmatrix}$$

nichtsingulär ist.