Prüfung aus Mathematik 1 für MB und BI

am 25. Juni 2003

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

---

1. a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \ldots\ x \neq 0 \\ 0 & \ldots\ x = 0 \end{cases}$ ist differenzierbar, ihre Ableitung ist aber an der Stelle 0 nicht stetig.
   b) Sei $g(x) = \sin x$ und $f(x)$ wie eben definiert. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Warum lässt sich die Regel von de l'Hospital hier nicht anwenden?

---

2. a) Berechnen Sie den Konvergenzradius und untersuchen Sie das Verhalten am Rand des Konvergenzintervalls:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} x^n$$
   b) Entwickeln Sie die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$
   in eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = -2$.

---

3. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:
$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx \qquad \int (x-2)e^{-x}\,dx \qquad \int \frac{dx}{(x-3)(x^2+4)}$$

---

4. a) Bringen Sie die folgende Matrix A auf Diagonalgestalt. Wählen Sie dabei die Transformationsmatrix S so, dass
$$D = S^T \cdot A \cdot S$$
   gilt. (*Hinweis: Einer der Eigenwerte* λ_i *lautet* $\lambda_1 = -6$)
   b) Was wissen Sie über Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von reellen, symmetrischen Matrizen?
   c) Bestimmen Sie (ohne zusätzlichen Rechenaufwand) $\det(A)$.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

---

5. Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = x^2(y+4), \qquad y(1) = 5$.
