

Prüfung aus Mathematik 1 für MB und BI
am 30. Jänner 2004

Zuname:.....
Vorname:.....
Kennzahl:.....
Mat.Nr.:.....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

Bestimmen Sie insbesondere Nullstellen, Maxima, Minima, Wendepunkte und untersuchen Sie das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$. Fertigen Sie eine Skizze an!

- (b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung

$$xe^{-x^2} < \frac{1}{\sqrt{2e}}?$$

- (c) Ist die erste Mediane $y = x$ Tangente an den Graph der Funktion $f(x) = xe^{-x^2}$?

2. (a) Berechnen Sie $\int \frac{2}{x(x^2 - 1)} dx$.

- (b) Konvergieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_{10}^{\infty} \frac{2}{x(x^2 - 1)} dx \quad \text{und} \quad \int_{10}^{\infty} \frac{\text{Arctan}x}{x(x^2 - 1)} dx?$$

3. (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}(x-1)^n$?

- (b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)^n$

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' + 2\frac{y}{x} = 3$. Wie lautet jene Lösung, die die Anfangsbedingung $y(1) = -1$ erfüllt?

5. (a) Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

- (b) Begründen Sie, warum die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden. Wie lauten die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser neuen Basis?