Prüfung aus Mathematik 1 für BI

am 19. März 2004

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl / Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1.) Es sei α eine feste reelle oder komplexe Zahl. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass dann gilt: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\alpha & 1 \end{pmatrix}$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2.) a) Geben Sie den genauen Konvergenzbereich der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}$ an. Für welche Werte von x konvergiert diese Reihe? Ist sie auf ihrem Konvergenzintervall gleichmäßig konvergent?

3.) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = x^x$, $x > 0$ und skizzieren Sie ihr Schaubild.
Bestätigen Sie, dass $f(x)$ bei $x = 0$ stetig wird, wenn man $f(0) = 1$ festsetzt.
Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung und entscheiden Sie, ob es absolute Extrema und Wendepunkte gibt.
Bestätigen Sie ferner, dass $f(x)$ im Punkt $(0, 1)$ eine senkrechte Tangente hat (Hinweis: zu zeigen ist $\lim\limits_{h \to 0_+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -\infty$)
Formulieren Sie die Regel von de l'Hospital.

4.) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von der x-Achse und der Kurve mit der Polardarstellung $r = r(\varphi) = \cos\varphi$ $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$ eingeschlossenen Bereichs (Skizze!).

5.) a) Es sei $\boldsymbol{n}$ ein fester (Spalten-)Vektor im $\mathbb{R}^3$.
Zeigen Sie, dass die Menge $E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{n}^{tr}\boldsymbol{x} = 0\}$ ein Vektorraum ist!

b) Wählen Sie $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und geben Sie eine Orthogonalbasis von E an!

c) Erklären Sie die Begriffe Basis und Dimension.

d) Was lässt sich über die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen $(n \times n)$-Matrix sagen?