Prüfung aus Mathematik 1 f. MB+BI

am 29. September 2006

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^k \leq 2^{(k^2)}$ für alle $k \geq 1$ gilt.
   (b) Benutzen Sie Teil (a) des Beispiels, um die Konvergenz/Divergenz der Reihe
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^k}{2^{((k+1)^2)}}$$
   mittels Majoranten– bzw. Minorantenkriterium nachzuweisen.
   (c) Welche der folgenden Reihen konvergiert, welche divergiert (Begründung!)?
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{(-1)})^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{((-1)^n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot (-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n.$$

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = (1 - \ln(tx))^2$, $t \in \mathbb{R}$ konstant.
   (a) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit des Wertes des Parameters t, den Definitionsbereich von $f(x)$ (Hinweis: es sind so 3 Fälle zu behandeln).
   (b) Fixieren Sie t so, dass $f(x)$ an der Stelle $x = e/2$ ein Extremum annimmt.
      i. Wo befinden sich in diesem Fall Kandidaten für Wendepunkte von $f(x)$?
      ii. Gibt es für diesen t-Wert eine Funktion $g(x)$, sodass die Funktion
      $$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \leq 0 \\ f(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$
      auf ganz $\mathbb{R}$ stetig wird? Erklären Sie den Begriff Stetigkeit und warum eine solche Funktion $h(x)$ stetig/nicht stetig sein kann?

3. (a) Erklären Sie das Konzept des Differentialquotienten anhand einer *aussagekräftigen und gut erklärten* Skizze. Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an die Funktion $f(x) = 2x^2$ an der Stelle $x = 2$ mit dem Differentialquotienten.
   (b) Geben Sie die Gleichung der Ebene E im $\mathbb{R}^3$ mit Normalvekor $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an, in welcher der Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt. Geben Sie einen weiteren Punkt Q ungleich P an, der in dieser Ebene E liegt.

4. Am 29. September 1960 schlägt der UdSSR Premier Nikita Sergejewitsch Chruschtschow im Rahmen einer UNO Versammlung mit seinem Schuh auf sein Pult. Angenommen die Geschwindigkeit des Schuhs genüge der Differentialgleichung $x'(t) = x(t) - (t^2 + 2)$, $x(0) = 0$. Lösen Sie diese Differentialgleichung. Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Schuh zum Zeitpunkt $t = 2$ das Pult?

5. (a) Ist folgende Aussage richtig oder falsch?
      Eine Folge (a_n), bei der jedes 10^k–te Folgenglied, $k = 1, 2, 3, \ldots$, die Ungleichung $|a_{10^k}| > \frac{1}{10^k}$ erfüllt, kann konvergieren.
   Falls richtig, geben Sie ein Beispiel einer solchen Folge an, falls falsch, warum?
   (b) Bestimmen Sie $\lim_{x\to\infty} x^{-1/x}$.
   (c) Untersuchen Sie mit dem Cauchy'schen Integralkriterium das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln(k)}$.