Prüfung aus Mathematik 1 f. MB

am 3. März 2006

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.

   (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A. Bestimmen Sie den Eigenvektor zum Eigenwert 1.

   (c) Erklären Sie den Zusammenhang der Aufgaben (a) und (b).

   (d) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 1$ folgende Identität für die Matrix A gilt:

$$A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n \\ 2^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

2. (a) Bestimmen Sie die Taylorreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ von $f(x) = 1/x$ mit Entwicklungspunkt 1.

   (b) Bestimmen Sie das Konvergenzintervall der Taylorreihe aus (a).

   (c) Skizzieren Sie $f(x)$ und $g(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2$, a_0, a_1, a_2 aus Aufgabe (a), im Intervall $(0, 3)$.

   (d) Wie berechnet man allgemein die lokalen Extremwerte einer Funktion? Erklären Sie diese Vorgehensweise und bestimmen Sie die lokalen Extrema von $g(x)$.

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Schwingungsgleichung $y'' + 7y' + 12y = e^{5x}$ nach der Methode der Variation der Konstanten.

4. (a) Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Belegen Sie gegebenenfalls die Falschheit einer Aussage durch ein Gegenbeispiel:

      i. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so konvergiert auch die Folge (a_n).

      ii. Konvergiert die Folge (a_n), so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

      iii. Konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n), so konvergiert auch die Folge $(a_n b_n)$.

      iv. Konvergiert die Folge (a_n) und divergiert die Folge (b_n), so divergiert auch die Folge $(a_n b_n)$.

      v. Divergieren die Folgen (a_n) und (b_n), so divergiert auch die Folge $(a_n b_n)$.

   (b) Wie lautet das Majorantenkriterium von Weierstraß? Verwenden Sie selbiges, um die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^4 - \cos(n)}$ nachzuweisen.