Prüfung aus Mathematik 1 f. MB u. BI

am 13. Jänner 2006

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Zeigen Sie mit Induktion, dass 6 für alle natürlichen n die Zahl $5^{2n-1}+1$ teilt.

2. (a) Was besagt die Kettenregel der Differentation? Sei $y(x)$ eine differenzierbare Funktion. Benutzen Sie die Kettenregel, um $(\ln(y(x)))'$ zu berechnen.

   (b) Sei
   $$f(x) := \begin{cases} |x| & x \leq 0, \\ xa^{-x} & x > 0. \end{cases}$$
   Fixieren Sie $a > 0$ so, dass $f(x)$ für $x > 0$ an $x = 1/(\ln(3))$ ein lokales Extremum annimmt. Ist $f(x)$ dann an 0 stetig differentierbar? Skizzieren Sie die Funktion.
   Hinweis: $(a^{-x})' = -a^{-x}\ln(a)$.

   (c) Zeigen Sie die Konvergenz von $\int_1^\infty f(x)dx$ für $a = 3$.

3. (a) Ein Rodler wird durch Reibung proportional zur a-ten Potenz der Geschwindigkeit abgebremst (a konstant). Dieser Sachverhalt wird durch die Differentialgleichung $\dot{v} = kv^a$, $k < 0$, ausgedrückt. Lösen Sie die Differentialgleichung, wobei die Fälle $a = 1$ und $a \neq 1$ getrennt zu betrachten sind.

   (b) Unterliegt der Rodler zusätzlich einer konstanten Beschleunigung b, so ergibt sich als Modell für den Geschwindigkeitsverlauf $\dot{v} = kv^a + b$. Bestimmen Sie v in diesem Fall für $a = 1$.

4. (a) Wie lautet das Cauchy'sche Integralkriterium für unendliche Reihen? Zeigen Sie damit die Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^r}$ für festes $r > 1$.

   (b) Bestimmen Sie den Grenzwert von $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{r^n}$, $r > 1$ fest.

5. (a) Bestimmen Sie die komplexen Zahlen $z = a + bi$, welche $\text{Im}(1/z) = -1$ erfüllen. Skizzieren Sie die Menge dieser Zahlen in der komplexen Ebene.

   (b) Bestimmen Sie den Abstand vom Ursprung zu der Ebene, welche normal zu dem Vektor $n = (1, 2, 2)$ ist und den Punkt $P = (1, 2, 3)$ enthält.