Prüfung aus Mathematik 1 f. MB

am 28. April 2006

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Beweisen Sie die Identität
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$$
   (a) durch vollständige Induktion.
   (b) indem Sie $\frac{1}{k(k+1)}$ durch Partialbruchzerlegung aufspalten und die Summe direkt berechnen.

2. (a) Berechnen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{2n+1}.$$
   Hinweis: Exponentialfunktion!
   (b) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n^2-1)(n^2-2)\cdots(n^2-n)}{(n^2)!}$? Begründung!
   (c) Geben Sie
      i. eine konvergente Folge (a_n) an, für die $1 \le a_n \le 3$ für alle n gilt.
      ii. eine divergente Folge (b_n) an, für die $1 \le b_n \le 3$ für alle n gilt.
      iii. eine Folge (c_n) an, die gegen Ihre Matrikelnummer M konvergiert, wobei c_1 und $c_2 < M$, c_3 und $c_4 > M$, c_5 und $c_6 < M$, c_7 und $c_8 > M$, ... allgemein für alle k: c_{4k+1} und $c_{4k+2} < M$, c_{4k+3} und $c_{4_k+4} > M$ erfüllt sein soll.

3. Gegeben ist die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ \sin(2\pi x)\ln(|x|) & 0 < x \le 2, \\ \frac{\sin(2/x)}{x^2} & x > 4. \end{cases}$$
   (a) Bestimmen Sie die Nullstellen und lokale Extrema von $f(x)$ im Intervall $[0,2]$.
   (b) Ist $f(x)$ stetig? Untersuchen Sie speziell $f(0)$.
   (c) Skizzieren Sie $f(x)$ (für $x > 4$ näherungsweise).
   (d) Berechnen Sie $\int_4^\infty f(x)dx$.

4. (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = -x/y$, $y(1) = 0$. (Zur Kontrolle: $y = \sqrt{1-x^2}$.)
   (b) Sei
$$f(x) = \begin{cases} y(x) & 1 \le x < 1/2, \\ \sqrt{5/4 - x} & 1/2 \le x \le 5/4, \end{cases}$$
   $y(x)$ aus (a). Skizzieren Sie $f(x)$ und berechnen Sie das Volumen des Körpers, der bei Rotation von $f(x)$ um die x-Achse entsteht.

5. Erklären Sie den Begriff Konvergenzradius und berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(n + (-1)^n)x^{2n}$.