Prüfung aus Mathematik 1 f. MB+BI

am 9. Juni 2006

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion für $n \geq 0$
$$\int_0^\infty \frac{x^n \mathrm{e}^{-2x}}{n!} dx = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$
Hinweis: Partielle Integration.

   (b) Berechnen Sie, unter Verwendung von (a),
$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{x^n \mathrm{e}^{-2x}}{n!} dx.$$

   (c) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis aus (b), indem Sie auch
$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n \mathrm{e}^{-2x}}{n!} dx \qquad \left(= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x} \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} \right) dx \right)$$
berechnen. (Hinweis: Reihendarstellung der Exponentialfunktion verwenden!)

2. (a) Berechnen Sie alle (komplexen) Nullstellen von $x^3 + 1 = 0$ in Polardarstellung.

   (b) Skizzieren Sie die Menge der komplexen Zahlen $z = a + bi$, welche $Im(z^2) = 1$ erfüllen.

3. Gegeben ist die Funktion
$$f(x) = \frac{x-2}{x^2+x-1}.$$
   (a) Wo ist $f(x)$ stetig? Bestimmen Sie die Nullstellen und die lokalen Extrema (auf Hoch– bzw. Tiefpunkte überprüfen!) von $f(x)$. Berechnen Sie weiters $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. (Bemerkung: $f''(x)$ ist nicht zu berechnen, verwenden Sie näherungsweise $\sqrt{5} \approx 2.2$ und
$$f''(x) \quad \begin{matrix} \geq 0 & \text{falls } \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5})}{2} \text{ oder } x \gtrapprox 6.5, \\ < 0 & \text{sonst.)} \end{matrix}$$

   (b) Geben Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P = (1, f(1))$ an.

   (c) Skizzieren Sie $f(x)$ und die Tangente aus (b).

4. (a) Was bedeuten Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen? Kann eine Reihe
      i. konvergieren, aber nicht absolut konvergieren? Falls ja, geben Sie ein Beispiel einer solchen Reihe an.
      ii. absolut konvergieren, aber nicht konvergieren? Falls ja, geben Sie ein Beispiel einer solchen Reihe an.

   (b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe
$$\sum_{k=2}^\infty \frac{k\left((-1)^k + 1\right)^k}{(\ln(k))^k} x^k.$$

   (c) Geben Sie eine Folge (a_n) an, welche $0 < a_n < \frac{1}{3} a_{n-1}$ für alle n erfüllt. Bestimmen Sie den Grenzwert Ihrer Folge. Formulieren Sie den Satz, der die Konvergenz einer solchen Folge sichert.

5. Berechnen Sie mit der Leibnizschen Sektorformel den Flächeninhalt des Bereiches, der von der Kurve $\binom{2\cos(t)}{\sin(t)}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, eingeschlossen wird. Skizzieren Sie diese Kurve.