Prüfung aus Mathematik 1 f. MB+BI

am 29. September 2006

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\left(\frac{1}{1-2x}\right)^{(n)} = \frac{2^n n!}{(1-2x)^{n+1}},$$

wobei $(f(x))^{(n)}$ die n–fache Ableitung von $f(x)$ nach x ist.

(b) Wie lautet folglich die Taylorreihe der Funktion $r(x) = 1/(1-2x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

(c) Erklären Sie den Zusammenhang ihres Ergebnisses zur geometrischen Reihe und deren Summenformel.

2. (a) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Ab welcher natürlichen Zahl N gilt dann $1/n^2 < \epsilon$ für $n \geq N$? Erklären Sie den Zusammenhang der Existenz eines solchen N und der Konvergenz der Folge $1/n^2$.

(b) Berechnen Sie folgenden Grenzwerte:

- direkt : $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \ldots$. (Hinweis: Wurzeln durch Potenzen ausdrücken.)
- vgl. Exponentialfunktion: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2}$.
- de l'Hospital (Voraussetzungen überprüfen!): $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\cot(x)}$.

(c) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$? Erklären Sie das verwendete Kriterium.

3. Gegeben sei $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$.

(a) Überprüfen Sie mit dem Differentialquotienten, ob $f(x)$ an 0 differenzierbar ist? Auftretende Grenzwerte sind mit Hilfe der Potenzreihendarstellung von e^x zu berechnen.

(b) Konvergiert $\int_3^{\infty} f(x)dx$?

4. (a) Bestimmen Sie Definitionsbereich und Nullstellen der Funktion $g(x) = \frac{x^2+3x-4}{(x-5)(x+1)^2}$. Skizzieren Sie $g(x)$.

(b) Berechnen Sie $\int g(x)dx$ (Partialbruchzerlegung).

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{3y(x)}{x} + x^3 g(x).$$

(Hinweis: Verwenden Sie (b) zur Berechnung der Partikulärlösung.)

5. (a) Lösen Sie den Bruch $\frac{a+bi}{1-i}$ auf (für allgemeine a, b reell).

(b) Skizzieren Sie die Menge der komplexen Zahlen $z = a + bi$, welche $Re(\frac{a+bi}{1-i}) = 1$ erfüllen, in der Gauß'schen Zahlenebene.