Prüfung aus Mathematik 2 f. MB

am 29. September 2006

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = y\sin(x^3)$.
   (a) Bestimmen Sie die Extremstellen dieser Funktion.
   (b) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen von $f(x,y)$ über den Geraden $x = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$ und $y = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$ jeweils im Intervall $[0, \sqrt[3]{2\pi})$. ($\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \approx 1.16$, $\sqrt[3]{\pi} \approx 1.46$, $\sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}} \approx 1.68$, $\sqrt[3]{2\pi} \approx 1.84$)
   (c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom von $f(x,y)$ mit Anschlussstelle $(\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}, 1)$ inklusiver quadratischer Terme.
   (d) Berechnen Sie $\int_0^{(2\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}})} \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} f(x,y)\,dx\,dy$, indem Sie den Integrationsbereich skizzieren und das Integral nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge lösen.

2. Die Parametrisierung der Mantelfläche eines nach oben offenen Kegels mit der Spitze im Ursprung sei $\mathbf{x}(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ 4r \end{pmatrix}$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $r > 0$.
   (a) Liegt $\mathbf{x}(r,\pi)$ (d.h. falls man $\phi = \pi$ fixiert) in der (x,y)–, (x,z)–, oder in der (x,z)–Ebene?
   (b) Was ändert sich, wenn der Kegel Höhe $z = 4$ hat? Geben Sie eine Parametrisierung der Deckfläche D an (vgl. Skizze).
   (c) Dieser abgeschnittene Kegel K (inkl. D) sei Bernhards Schultüte. Christians neidige Blicke werden durch das Vektorfeld $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ausgedrückt. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_K \mathbf{v}\,dO$.

3. (a) Gegeben ist das Anfangswertproblem $(y^2 e^{xy} + 3x^2 y)dx + (x^3 + (1+xy)e^{xy})dy = 0$ und $y(-1) = 0$.
      i. Überprüfen Sie die Exaktheit dieser Differentialgleichung und berechnen Sie die Lösung.
      ii. Geben Sie den Hauptsatz über implizite Funktionen an. Verwenden Sie diesen, um zu überprüfen, ob die zuvor ermittelte Lösung der Differentialgleichung im Punkt $P = (1,0)$ in der Form $y = g(x)$ explizit dargestellt werden kann.
   (b) Bestimmen Sie die ersten 6 Koeffizienten der Potenzreihe der Funktion $y(x)$, welche das Anfangswertproblem $y'' = y + x$, $y(0) = y'(0) = 0$ löst.

4. (a) Sei E das Einheitsquadrat. Finden Sie eine Parametrisierung $\mathbf{x}_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{pmatrix}$, $i = 1,2,3,4$, der vier Kurvenstücke C_1, C_2, C_3 und C_4 (vgl. Skizze), welche zusammen E beranden. Bestimmen Sie die nach außen weisenden Normalvektoren $\mathbf{n}_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_i(t) \\ -\dot{x}_i(t) \end{pmatrix}$ von $\mathbf{x}_i(t)$, $i = 1,2,3,4$.
   (b) Berechnen Sie $\sum_{i=1}^{4} \int_{a_i}^{b_i} \mathbf{v}(\mathbf{x}_i(t)) \cdot \mathbf{n}_i(t)dt$ für das Vektorfeld $\mathbf{v} = \binom{x^2}{y}$ direkt und mittels der richtigen Version des Integralsatzes in der Ebene. Was berechnet dieses Integral?

5. Gegeben sei das Randwertproblem $u_{tt} = 9u_{xx}$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = t$, u beschränkt.
   (a) Interpretieren Sie die Randbedingungen $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = t$.
   (b) Transformieren Sie, unter Berücksichtigung der Randbedingungen, die Differentialgleichung mittels Laplacetransformation auf eine gewöhliche Differentialgleichung und geben Sie ein Fundamentalsystem dieser an.