Prüfung aus Mathematik 2 f. MB

am 3. März 2006

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Sei $f(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + 3x^2 + 2y^2$, a_0, a_1, a_2 konstant.
   (a) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene von $f(x,y)$ im Punkt $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$?
   (b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 so, dass die Ebene $\epsilon : 6x - 4y - z + 4 = 0$ eine Tangentialebene an $f(x,y)$ im Punkt $(2, 0, z_t)$ ist. (Zur Kontrolle: $f(x,y) = 16 - 6x - 4y + 3x^2 + 2y^2$.)
   (c) Berechnen Sie das lokale Extremum von $f(x,y)$ und überprüfen Sie, ob ein Minumum oder ein Maximum vorliegt.
2. (a) Lösen Sie die autonome Differentialgleichung $\ddot{x} = -\dot{x}/x^2$, $x(1) = \dot{x}(1) = 1$. (Hinweis: Integrationskonstanten mittels Anfangswerten gleich bestimmen!)
   (b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus (a), indem Sie die Probe machen.
   (c) Wann ist die Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung stabil bzw. asymptotisch stabil?
3. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \pi/4, \\ 1/2 & \pi/4 \le x < 3\pi/4, \\ 0 & 3\pi/4 \le x < 5\pi/4, \\ 1/2 & 5\pi/4 \le x < 7\pi/4, \\ 1 & 7\pi/4 \le x < 2\pi, \end{cases}$$

   2π– periodisch fortgesetzt.
   (a) Skizzieren Sie die Funktion und bestimmen Sie ihre Fourierreihe. (Hinweis: $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.)
   (b) Welchen Wert nimmt die Fourierreihe an $x = \pi/4$ und $x = \pi$ an?
4. Gegeben ist die einseitig unbeschränkte Schwingungsgleichung

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad (1)$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad (2)$$
$$u(0,t) = \cos(t), u \text{ beschränkt.} \quad (3)$$

   (a) Wenden Sie die Laplacetransformation an, um (1) unter Berücksichtigung von (2) in eine gewöhnliche Differentialgleichung umzuformen und lösen Sie diese.
   (b) Geben Sie unter Einbeziehung der Randbedingung (3) und nach Rücktransformation die Lösungsfunktion $u(x,t)$ an.
5. Lösen Sie mit der Eigenwert– Eigenvektormethode das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$