Prüfung aus Mathematik 2 f. MB VT

am 13. Jänner 2006

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Interpretieren Sie den Integralsatz von Gauß.

   (b) Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $v = (x, y, z)$. Skizzieren Sie das Vektorfeld in der Ebene $z = 0$ entlang der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$.

   (c) Sei K ein Würfel definiert durch die Eckpunkte $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$. Bestimmen Sie $\int\int_K v dO$.

2. (a) Ein Schneemann besteht aus zwei (übereinander gelagerten) Kugeln mit Radien r_1 und r_2. Wie sind, bei fester Schneemenge $V = 72\pi$, die Radien r_1 und r_2 zu wählen, sodass der Schneemann maximale Höhe erreicht.

   (b) Angenommen der Schneemann steht auf dem Koordinatenursprung $(0,0,0)$. Die Nase des Schneemanns maximaler Höhe sei ein Geradenstück von Länge 1, welches im Punkt $(3,0,9)$ parallel zur x-Achse fixiert ist. Parametrisieren Sie dieses Geradenstück.

   (c) Angenommen der Schneemann steht in einem Vektorfeld v mit Potentialfunktion $P = \sin(x) + \cos(y) + \tan(z)$. Wie lautet das Vektorfeld? Berechnen Sie das Kurvenintegral über die Nase aus (b) bezüglich des Vektorfeldes v.

3. (a) Finden Sie einen geeigneten integrierenden Faktor und lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{x^2 + y}{x}, \qquad y(1) = 1,$$

   mit dem Lösungsverfahren für exakte Differentialgleichungen. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie das Anfangswertproblem auch mit dem Potenzreihenansatz lösen.

   (b) Bestimmen Sie 2 Schritte des Euler-Polygonzugs, der die Lösung dieser Differentialgleichung approximiert mit Schrittweite $h = 1/2$. Vergleichen Sie in Form einer Skizze die exakte Lösung aus (b) mit der Näherung im Intervall $[1, 2]$.

4. (a) Lösen Sie $y'' - 2y' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$ mit Hilfe der Laplace Transformation und machen Sie die Probe.

   (b) Berechnen Sie das Volumen des Bereichs unter der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$, welcher über dem Dreieck in der Ebene $z = 0$ liegt, das durch die Geraden $y = 0$, $x = 1$ und $x = y$ begrenzt wird

      i. direkt mittles Doppelintegral.

      ii. durch zweifache Integration nach Transformation auf Polarkoordinaten. (Hinweis: $\int(\tan^2(x) + 1)^2 dx = \tan^3(x)/3 + \tan(x)$, $\tan(\pi/4) = 1$.)

5. (a) Gegeben ist die Rumpfgleichung $(x + y)u_x(x, y) + 2yu_y(x, y) = 0$. Die Charakteristikenmethode liefert ein ebenes linares Differentialgleichungssystem. Stellen Sie dieses auf und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem.

   (b) Wie kann man prinzipiell überprüfen, ob ein Fundamentalsystem vorliegt?