

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{x}{y}$ für $y \neq 0$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f .

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion f für jeden Punkt $P(t, t)$ mit $t \neq 0$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Welches Verhalten hat die Funktion f entlang der Geraden $x = y$? (Begründung!)

Hinweis: Interpretieren Sie z.B. das Ergebnis aus (b).

2. (a) Darf man im folgenden Integral die Integrationsreihenfolge vertauschen? (Begründung!)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx dy.$$

(b) Berechnen Sie das Integral aus (a).

3. (a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_F \mathbf{v} d\mathbf{O}$ vom Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ über den Zylinder

$F: y^2 + z^2 \leq 1$, der von $x = -1$ bis $x = 1$ reicht. (Mantel und zwei Deckflächen!)

(b) Formulieren Sie den Integralsatz von Gauß und verifizieren Sie ihn für das Integral aus (a).

(c) Geben Sie die Definition eines konservativen Vektorfeldes.

(d) Das Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{z}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ erfüllt die Integrabilitätsbedingung in \mathbb{R}^2 ohne den Punkt $(0, 0)$.

(Nicht nachrechnen!)

- Bestimmen Sie – ohne Rechnung – das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{v} d\mathbf{x}$ über den Kreis $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$. Begründung!!!

- Ist diese Vorgangsweise auch für den Kreis $C: x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ möglich? Begründen Sie Ihre Antwort! Keine Berechnung!

4. (a) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - y'' + y' - y = e^x?$$

(b) Welche der folgenden Mengen von Funktionen

$$\{x, -x\}, \quad \{x, x^2\}, \quad \{x, x^3\}$$

bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$? Warum?

(c) Bestimmen Sie jene Lösung der Differentialgleichung aus (b), für die $y(1) = y'(1) = 1$ gilt.

5. (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der partielle Differentialgleichung $z_{tt} - z_{xx} = 0$ mit den Randbedingungen $z_x(0, t) = z_x(1, t) = 0$.

(b) Erklären Sie den Begriff Differentialgleichung! Was bedeutet gewöhnlich bzw. partiell?